



Année Universitaire 2008-2009  
Master 1 « Mathématiques et Applications »

---

# **Problème de Stokes avec conditions aux limites non-linéaires**

**Application au procédé d'injection**

---

**Fabien NAVARRO**

Responsable : **Taoufik SASSI**

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme  
CNRS UMR 6139





# Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO) de l'université de Caen. Je tiens à remercier l'ensemble de la direction du Groupe de Mécanique, Modélisation Mathématique et Numérique (GM3N).

Je remercie chaleureusement Monsieur Taoufik Sassi pour m'avoir confié ce stage. Je tiens à vous exprimer ma reconnaissance pour vos conseils, votre disponibilité et la bienveillance que vous avez toujours manifesté à mon égard.

Je remercie particulièrement Monsieur Daniel Choï pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour ses conseils et pour nous avoir initié à la rédaction d'un document sous  $\text{\LaTeX}$ .

Je remercie Monsieur André Sesboüé pour m'avoir permis d'accéder à Matlab à partir des ordinateurs de la salle informatique.

Je tiens particulièrement à remercier l'ensemble du corps professoral du Master pour la qualité de ses enseignements, Messieurs Alain Campbell, Mohammed Louaked, Christian Dogbe,...

La présence de certains amis et étudiants (Anne-Claire, Eva, Maxime et les autres,...) est à l'origine du bon climat régnant au sein de la salle informatique et m'a permis de travailler dans d'agréables conditions.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Principes du procédé d'injection des thermoplastiques</b>	<b>3</b>
1.1 Le procédé d'injection . . . . .	3
1.2 Les étapes d'un cycle d'injection . . . . .	4
1.3 Écoulement du polymère dans le moule . . . . .	6
<b>2 Étude de l'écoulement d'un fluide newtonien</b>	<b>7</b>
2.1 Introduction . . . . .	7
2.2 Équations fondamentales de la mécanique des fluides . . . . .	7
2.3 Cas d'un fluide incompressible en régime stationnaire . . . . .	9
2.4 Conditions aux limites . . . . .	11
2.4.1 Conditions aux limites en entrée . . . . .	12
2.4.2 Conditions aux limites en sortie . . . . .	12
2.4.3 Conditions aux limites sur la paroi latérale . . . . .	12
<b>3 Formulation variationnelle du problème</b>	<b>17</b>
3.1 Problème en vitesse pression . . . . .	17
3.2 Problème en vitesse . . . . .	21
3.3 Formulation variationnelle du problème modèle . . . . .	23
<b>4 Discrétisation par éléments finis</b>	<b>25</b>
4.1 Résolution numérique . . . . .	25
4.2 Discrétisation par le MINI-élément . . . . .	25
4.2.1 Introduction . . . . .	25
4.2.2 Discrétisation du problème modèle . . . . .	26
4.3 Tests numériques . . . . .	30
4.3.1 Problème modèle . . . . .	30
4.3.2 Problème de Tresca . . . . .	34
4.3.3 Exemple de simulation . . . . .	36
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>37</b>
<b>Annexe</b>	<b>39</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>



# Table des figures

1.1	Dosage - plastification [18] . . . . .	4
1.2	Remplissage [18] . . . . .	4
1.3	Maintien (compactage) - refroidissement [18] . . . . .	5
1.4	Éjection [18] . . . . .	5
1.5	Modèle d'écoulement au front d'avancée de matière (effet fontaine) . . .	6
1.6	Modèle d'écoulement au front d'avancée de matière (effet fontaine) . . .	6
2.1	Représentation des différentes frontières et des différents domaines. . . .	12
2.2	Représentation du modèle de frottement de Tresca . . . . .	15
4.1	L'élément $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$ . . . . .	26
4.2	Géométrie et conditions aux limites du problème modèle. . . . .	27
4.3	Maillage grossier du problème de Stokes avec conditions de Dirichlet. . .	30
4.4	Champ de vitesse dans le domaine $\Omega$ . . . . .	30
4.5	Isobares dans le domaine $\Omega$ . . . . .	31
4.6	Maillage moyen (75 noeuds et 125 éléments). . . . .	31
4.7	Champ de vitesse dans le domaine $\Omega$ . . . . .	31
4.8	Isobares dans $\Omega$ (maillage moyen). . . . .	32
4.9	Comparaison des champs de vitesse : à gauche $P1 + /P1$ , à droite $P1/P1$ . 32	
4.10	Comparaison des isobares : à gauche $P1 + /P1$ , à droite $P1/P1$ . . . . .	32
4.11	Profil de vitesse : à gauche en entrée à droite dans le domaine. . . . .	33
4.12	Comparaison des vitesses à gauche <i>Fluent</i> , à droite <i>Matlab</i> . . . . .	33
4.13	Comparaison des pression à gauche <i>Fluent</i> , à droite <i>Matlab</i> . . . . .	33
4.14	Champ de vitesse dans le domaine $\Omega$ . . . . .	34
4.15	Zoom sur le champ de vitesse : à gauche adhérence et à droite glissement. 34	
4.16	Champ de vitesse dans le domaine $\Omega$ . . . . .	35
4.17	Zoom sur le champ de vitesse : à gauche adhérence et à droite glissement 35	
4.18	Maillage de la contraction (981 noeuds,1856 triangles). . . . .	36
4.19	Champ de vitesse dans la buse d'injection : à gauche <i>Fluent</i> et à droite <i>Matlab</i> . . . . .	36
4.20	Isobares dans la buse d'injection : à gauche <i>Fluent</i> et à droite <i>Matlab</i> . .	36
4.21	Cycle du moulage par injection . . . . .	39



# Introduction générale

L'origine de ce travail est l'étude d'un problème industriel sur la mise en forme des thermoplastiques par injection. Il s'agit de la simulation numérique du procédé de remplissage de l'empreinte d'un moule par un polymère fondu. C'est un procédé complexe à simuler, basé sur la modélisation de l'écoulement de fluides visqueux compressibles couplé à une thermique du moule qui régule le phénomène. Je me suis concentré sur la phase de **remplissage du moule** en négligeant l'aspect thermique. Une approche plus réaliste, prenant en compte cet aspect a été étudié d'un point de vue purement mathématique dans [16] ou, en considérant un fluide non-newtonien dans [9].

Le procédé d'injection de polymère ayant fait l'objet de nombreuses études, on peut citer par exemple [3].

Ce stage s'est déroulé sur une durée d'environ six semaines (principalement dans la salle informatique).

Dans le **Chapitre 1**, on présente brièvement les différentes étapes intervenant dans le procédé d'injection des polymères.

Dans le **Chapitre 2**, nous rappelons les principes généraux de la mécanique des milieux continus à partir desquels nous déduisons les équations qui modélise l'écoulement d'un polymère fondu, assimilable à l'écoulement isotherme d'un fluide newtonien incompressible en régime stationnaire.

Le **Chapitre 3** est consacré à l'étude du problème variationnel associé aux équations modélisant l'écoulement d'un polymère pendant la phase de remplissage de l'empreinte d'un moule d'injection. On étudie ce problème en lui associant successivement des conditions aux limites de Tresca puis de Dirichlet sur une partie de la frontière du domaine.

Dans le **Chapitre 4**, l'étude numérique du problème nécessite l'introduction d'un élément fini particulier. On vérifie, uniquement d'un point de vue numérique pourquoi doit-on introduire ce type élément. Ensuite, on réalise plusieurs simulations simples à partir d'un code réalisé sous *Matlab*. Et pour pouvoir tester la validité de ce programme on utilise le logiciel *Fluent*.



# Chapitre 1

## Principes du procédé d'injection des thermoplastiques

### 1.1 Le procédé d'injection

Le moulage par injection est un procédé de production utilisé dans le milieu industriel pour la fabrication de pièces et objets en polymère de forme plus ou moins complexe. Les pièces obtenues ont des applications dans tous les domaines d'activités, notamment dans l'industrie automobile pour la fabrication de grandes pièces comme le tableau de bord des véhicules ou le support de rétroviseur.

Les polymères utilisés sont principalement des thermoplastiques (80% des matériaux plastiques mis en forme correspondent à des thermoplastiques), mais on utilise aussi d'autres polymères, comme les thermoplastiques renforcés de fibres ou les thermodurcissables.

#### **Thermoplastiques**

Liquides très visqueux à l'état fondu, ils peuvent s'écouler à un débit faible.

Si on les refroidit ils se solidifient, si on les chauffe à nouveau ils ramollissent et redeviennent des liquides épais et visqueux, quelque soit le nombre de fois où ils ont été chauffés et refroidis.

Un exemple classique de polymère très largement utilisé dans l'industrie : le **PVC**.

#### **Thermodurcissables**

Ils ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois.

Si on les chauffe, ils se transforment en solides rigides indéformables.

Cette transformation est irréversible, si on les chauffe à nouveau, ils brûlent.

Exemple : le caoutchouc.

Nous nous limiterons à l'étude du procédé d'injection des thermoplastiques.

Le principe d'injection des thermoplastiques consiste à faire entrer un polymère à l'état fondu dans un moule froid, l'ouverture du moule et l'éjection de la pièce s'effectue lorsque le polymère s'est solidifié et a pris la forme du moule.

L'outillage d'injection est un moule métallique constitué de deux parties : une partie mobile et une partie fixe. Dans ce moule est "creusée" une forme appelée cavité moulante, ayant la forme de la pièce à réaliser.

## 1.2 Les étapes d'un cycle d'injection

Un cycle typique de moulage par injection comprend les étapes suivantes :

- Phase de dosage - plastification,
- Phase de remplissage dynamique,
- Phases de maintien (compactage) - refroidissement,
- Phase d'éjection.

### La phase de dosage - plastification

Au départ le moule est fermé, la *vis de plastification* est reculée. Ensuite le polymère est introduit sous forme de *granulés* qui sont progressivement chauffés, fondus et homogénéisés par le cisaillement dû à la rotation de la vis de plastification. L'énergie nécessaire à la fusion du polymère provient à la fois de l'action mécanique et du transfert thermique généré par l'intermédiaire du *fourreau* chauffé.

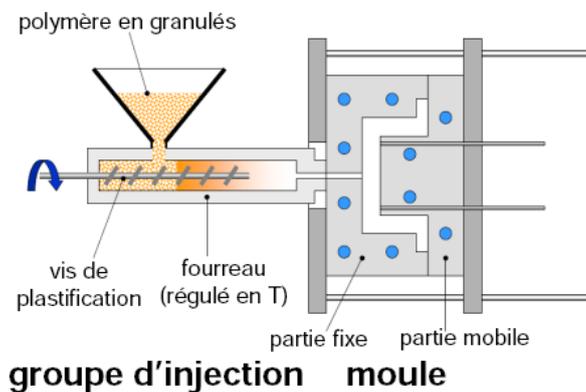


FIGURE 1.1 – Dosage - plastification [18]

### La phase de remplissage dynamique

Une fois que la quantité de polymère nécessaire à la fabrication de la pièce a été fondue, la buse s'ouvre et la vis est poussée axialement (à l'aide d'un vérin) et joue le rôle d'un piston en injectant à vitesse contrôlée le polymère fondu dans la cavité du moule. Les moules sont équipés de *canaux de refroidissement* permettant de figer la pièce thermoplastique.

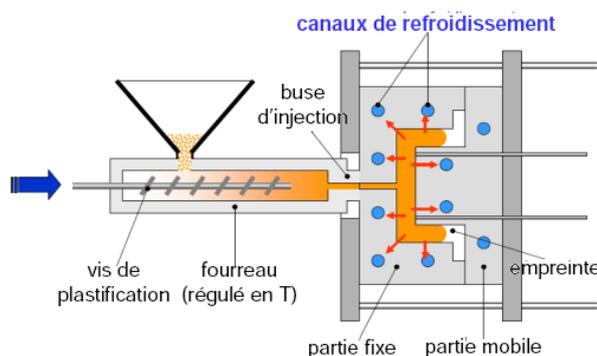


FIGURE 1.2 – Remplissage [18]

### La phase de maintien (compactage) - refroidissement

Une fois l'empreinte du moule remplie, on maintient une forte pression (pression de maintien) pour compacter la matière, jusqu'au moment où le seuil d'injection se fige et qu'il n'est plus possible de compacter la matière.

En effet, il est possible de compenser la variation de volume spécifique de polymère en injectant une quantité supplémentaire de polymère liquide sous forte pression, c'est le compactage.

Malgré le très faible débit d'écoulement du polymère pendant la phase de maintien, on notera toujours une différence entre la pression en *buse d'injection* et la pression dans la cavité à cause de la très forte viscosité des polymères.

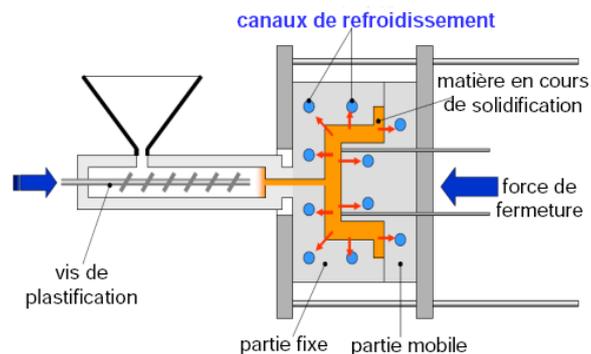


FIGURE 1.3 – Maintien (compactage) - refroidissement [18]

### La phase d'éjection

Une fois que la pièce est refroidie, le moule s'ouvre et la pièce solidifiée est éjectée à l'aide d'*éjecteur*. Pendant ce temps la matière à injecter au cycle suivant est préparé dans le système vis-fourreau. La pièce continue à se refroidir à l'extérieur du moule.

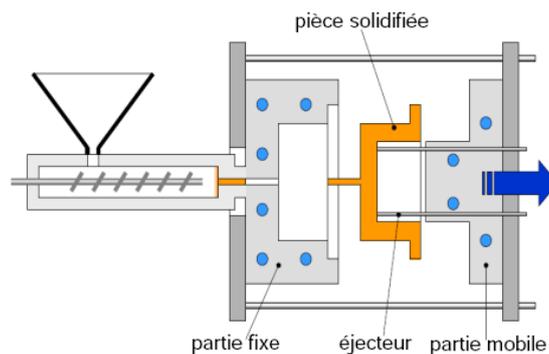


FIGURE 1.4 – Éjection [18]

La durée moyenne du cycle d'injection dépend à la fois de la dimension de la pièce à réaliser et de la nature du polymère utilisé. En général, elle varie de quelques secondes à une ou deux minutes. On note que la phase de remplissage est de courte durée, elle occupe environ un dixième du temps nécessaire à la réalisation d'un cycle (une fraction de seconde à quelques secondes pour les grandes pièces).

Dans ce travail, on s'intéresse en particulier à la phase de remplissage et plus précisément on cherche à modéliser l'écoulement du polymère au passage de la buse d'injection.

### 1.3 Écoulement du polymère dans le moule

Deux types de sollicitations vont influencer sur la nature de l'écoulement pendant l'étape de remplissage

- Le cisaillement,
- l'élongation.

Les écoulements mis en jeu dans les procédés industriels comme l'injection de thermoplastiques combinent les deux types d'écoulements précédents.

Loin du seuil d'injection et en amont du front de matière, un écoulement de cisaillement se met en place. Le taux de cisaillement étant maximal au niveau des points d'inflexion des profils de vitesse (Figure.1.5)

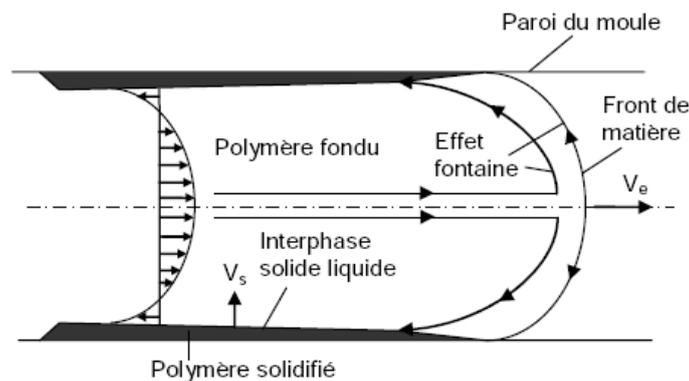


FIGURE 1.5 – Modèle d'écoulement au front d'avancée de matière (effet fontaine)

Au niveau du front de matière, les vitesses sont légèrement divergentes (Figure.1.6). Au niveau de la paroi, une couche de polymère solidifiée se forme, l'*effet fontaine* a un rôle déterminant puisqu'il ramène la matière du centre vers les parois froides du moule.

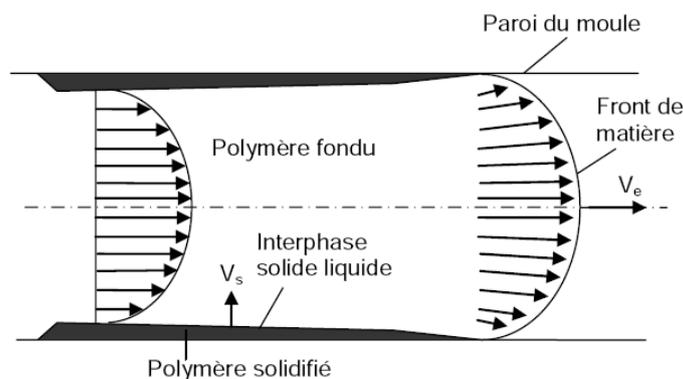


FIGURE 1.6 – Modèle d'écoulement au front d'avancée de matière (effet fontaine)

# Chapitre 2

## Étude de l'écoulement d'un fluide newtonien

En utilisant les lois de conservations de la mécanique des milieux continus, on détermine les équations aux dérivées partielles modélisant l'écoulement d'un fluide newtonien dans un domaine ouvert  $\Omega$  inclus dans  $\mathbb{R}^d$  (avec  $d = 2, 3$ ).

Ensuite, nous donnons le modèle pour un fluide incompressible en régime stationnaire et les conditions aux limites associées aux problèmes d'injection.

### 2.1 Introduction

Un polymère fondu est assimilable à un milieu continu, aussi son écoulement dans un moule d'injection est régi par les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus. La matière injectée doit donc vérifier :

- la conservation de la masse,
- la conservation de la quantité de mouvement,
- la conservation de l'énergie.

L'étude du procédé d'injection des polymères s'appuie sur les hypothèses suivantes

- le polymère fondu peut être considéré comme un matériau incompressible,
- les forces de masse et d'inertie (forces extérieures) sont négligeables devant les forces visqueuses (forces intérieures).

Cependant, si ces hypothèses sont convenables dans le cadre de la phase de remplissage du procédé d'injection, elles peuvent ne plus l'être dès que l'on s'intéresse à des applications plus complexes du procédé d'injection. En effet, pour certains matériaux, le caractère incompressible n'est plus envisageable.

### 2.2 Équations fondamentales de la mécanique des fluides

Écrivons le bilan de quantité de fluide entrant et sortant d'un volume de référence  $V$ , fixe par rapport au système de coordonnées dans lequel est exprimée la vitesse  $u$ . La variation par unité de temps de la masse contenue dans le volume  $V$  est égale à la masse traversant,

## CHAPITRE 2 : Étude de l'écoulement d'un fluide newtonien

---

par unité de temps, la surface  $S$  qui délimite le volume  $V$ . Soit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = - \int_S \rho u \cdot n d\sigma,$$

où

- $n$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $S$  et orienté vers l'extérieur ;
- $\rho$  est la densité du milieu continu ;
- $u$  est le champ des vecteurs vitesse à l'instant  $t$ .

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on a

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right] d\tau = 0$$

L'égalité ci-dessus est valide quelque soit le volume  $V$  considéré et l'intégrande est nul, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse.

On considère un domaine ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- *Équation de la conservation de la masse.*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(u) = 0, \quad (2.2.1)$$

où  $\rho$  est la densité du milieu continu.

Pour un point matériel en déplacement, on définit la dérivée totale ou particulière par l'opérateur symbolique

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla,$$

Par suite, l'équation ( 2.2.1) s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0. \quad (2.2.2)$$

- *Équation de la conservation de la quantité de mouvement.*

$$\rho \frac{du}{dt} = \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho f. \quad (2.2.3)$$

où,

- $f = (f_1, f_2, f_3)^\top$ , représente une distribution volumique des forces extérieures,
- $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de composante  $\sigma_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

On note que cette loi est déduite du principe fondamental de la dynamique, qui indique que la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces appliquées.

- *Équation de conservation de l'énergie.*

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) - \operatorname{div}(q) + r, \quad (2.2.4)$$

où

## 2.3 Cas d'un fluide incompressible en régime stationnaire

---

- $e$  représente l'énergie interne du fluide ;
- $r$  désigne l'apport d'énergie par unité de masse et de temps ;
- $q$  est le vecteur transport d'énergie ;
- $\underline{\underline{\varepsilon}}(u)$  est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3; \quad (2.2.5)$$

- $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u)$  est le produit contracté des deux tenseurs  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  défini par

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u).$$

On note que l'équation ( 2.2.4) est déduite du premier principe de la thermodynamique.

Dans notre étude, nous n'utiliserons pas la loi de conservation de l'énergie. En effet, dans le problème étudié on considère que le milieu continu est à température constante.

Cependant, cette hypothèse est très restrictive du fait du fort couplage thermique et mécanique. En effet, la variation de la viscosité des polymères dépend fortement de la température. Lors d'un cycle d'injection, le polymère s'écoule sous l'effet de la pression, dissipe de l'énergie, la viscosité baisse et la pression diminue.

Une approche plus réaliste, expliquant que tout procédé de mise en forme (injection, extrusion,...) est un problème couplé de mécanique et de thermique, est donnée dans [13].

On peut tout de même résumer brièvement ici les effets thermiques existants dans le procédé d'injection.

### Les effets thermiques

Lors de l'écoulement d'un polymère fondu, une partie de l'énergie de la matière est stockée sous forme élastique et une partie est dissipée sous forme de chaleur. Ainsi, une hausse de la température provoque une baisse de la viscosité du polymère. Le phénomène se localise surtout dans la proximité de l'interface polymère/paroi. En effet, en général la température du fourreau est maintenue à une température comprise entre 200°C et 300°C.

## 2.3 Cas d'un fluide incompressible en régime stationnaire

A partir des relations ( 2.2.2) et ( 2.2.3), nous déterminons les équations qui gouvernent l'écoulement en régime stationnaire d'un fluide newtonien dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), de frontière  $\Gamma$  assez régulière.

- *Loi de comportement d'un fluide visqueux*

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}(u) + \lambda\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(u))\underline{\underline{\mathbb{1}}} - p\underline{\underline{\mathbb{1}}}, \quad (2.3.1)$$

où

- $p$  est la pression du fluide ;

## CHAPITRE 2 : Étude de l'écoulement d'un fluide newtonien

---

- $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé;
- $\mathbb{1}$  est le tenseur identité d'ordre 2;
- $\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(u))$  représente la trace du tenseur  $\underline{\underline{\varepsilon}}$

Lorsque le fluide est incompressible, nous avons la relation suivante :

- *Équation d'incompressibilité*

$$\text{div}(u) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.3.2)$$

**Remarque 2.3.1.** Le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , l'opérateur gradient  $\nabla$  et l'opérateur divergence  $\text{div}$ , sont liés par l'égalité ci dessous

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(u)) &= \text{Tr}(\nabla u) \\ &= \text{div}u. \end{aligned}$$

Ce résultat et l'équation ( 2.3.2) impliquent

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(u)) = 0. \quad (2.3.3)$$

La loi de comportement ( 2.3.1) devient

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}(u) - p\underline{\underline{\mathbb{1}}}, \quad (2.3.4)$$

qui s'écrit encore

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) - p\delta_{ij}. \quad (2.3.5)$$

où,  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker.

$$\delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Par suite, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement ( 2.2.3) devient

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu\varepsilon_{ij}(u) - p\delta_{ij}) + f_i \\ &= 2\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}(u) - \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + f_i \\ &= 2\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}(u) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Notons également qu'un mouvement est stationnaire si toute grandeur ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad (2.3.7)$$

Et on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \text{constante.} \quad (2.3.8)$$

L'équation du mouvement (2.3.6) devient

$$0 = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}(u) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (2.3.9)$$

Finalement, en se limitant aux écoulements isovolumes et isothermes, les équations du mouvement d'un fluide visqueux en régime stationnaire sont données par le système

$$(P_0) \begin{cases} -2\mu \operatorname{div} \underline{\underline{\varepsilon}}(u) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega. \\ + \text{ Conditions limites.} \end{cases}$$

avec  $u \in \mathbb{R}^d$  le vecteur vitesse,  $p \in \mathbb{R}$  la pression et  $f$  est un vecteur force auquel est soumis le fluide.

On introduit ensuite les conditions aux bords pour permettre la fermeture du système d'équations précédent et écrire les formulations qui suivent.

On note également que le problème de Stokes ( $P_0$ ) peut s'écrire sous la forme

$$(P_1) \begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ + \text{ Conditions limites} \end{cases}$$

Dans un domaine  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^2$  de bord  $\Gamma$ , on joint à ces équations des conditions aux limites, ici de Dirichlet sur la vitesse. Le système ( $P_1$ ) se récrit ( $u_1^D$  et  $u_2^D$  sont des fonctions données)

$$(P_2) \begin{cases} -\mu \Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} p = f_1 & \text{dans } \Omega, \\ -\mu \Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} p = f_2 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u_1^D \text{ et } u_2 = u_2^D & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ce problème nous servira de problème modèle pour la résolution numérique.

## 2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites constituent la traduction des interactions physiques avec le milieu extérieur. D'un point de vue mathématique, elles doivent être compatibles avec la nature des équations, de manière à assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème. D'un point de vue mécanique, elles doivent représenter le plus fidèlement possible le phénomène physique que l'on souhaite modéliser.

La frontière du domaine  $\Omega$  peut être soumise à différentes conditions aux limites qui sont généralement de deux types :

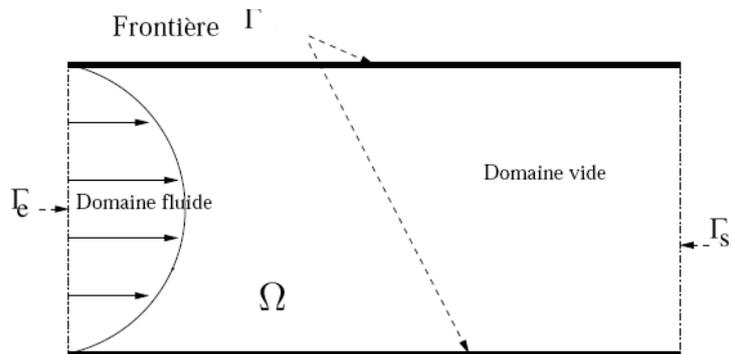


FIGURE 2.1 – Représentation des différentes frontières et des différents domaines.

— force, ou vitesse.

Voici les conditions aux limites que nous allons imposer pour le problème modèle, nous donnons ensuite de manière plus détaillée celles généralement utilisées lors de la phase de remplissage.

- sur  $\Gamma_e$ , nous imposons une condition de vitesse par un profil parabolique :  $u_1 = \text{parabole}, u_2 = 0$ ,
- sur  $\Gamma$ , on impose un contact collant qui se traduit par :  $u = 0$ ,
- sur  $\Gamma_s$ , une pression est imposée :  $(\sigma n) \cdot n = -p$ .

### 2.4.1 Conditions aux limites en entrée

Sur la frontière d'entrée  $\Gamma_e$ , nous imposons un débit de polymère qui se traduit par une condition de Neumann sur la vitesse.

En pratique, lors de l'injection du moulage des pièces plastiques, il est d'usage d'injecter à débit imposé jusqu'à ce que la pression en entrée atteigne une valeur donnée, puis de maintenir la pression en entrée à cette valeur. La condition de Neumann est alors remplacée par une condition de Dirichlet.

### 2.4.2 Conditions aux limites en sortie

En sortie, la pression  $p$  étant déterminée à une constante près, on fixera la valeur de la pression en un unique point.

### 2.4.3 Conditions aux limites sur la paroi latérale

On peut imposer différents types de conditions aux limites sur le bord  $\Gamma$  du domaine. La condition théorique d'adhérence parfaite sur les parois internes du moule, ou condition de contact collant, se traduit par une condition de Dirichlet homogène ( $u = 0$ ).

Cependant, il est d'usage d'utiliser d'autres conditions aux limites, comme la condition aux limites non linéaire de Tresca (défini dans la suite), permettant de traduire un éventuel

glissement à la interface polymère/paroi.

Pour pouvoir définir convenablement les conditions aux limites du problème d'injection, on commence par rappeler quelques notions utiles.

### Notion de viscosité

La viscosité traduit la résistance d'un fluide à l'écoulement, en général on la note  $\eta$  (ou  $\mu$ ). Il faut préciser que  $\eta$  correspond à la viscosité dynamique, par opposition la viscosité cinématique qui est généralement notée  $\nu$ .

La viscosité cinématique est égale au rapport de la viscosité dynamique par la masse volumique du fluide considéré.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (2.4.1)$$

La très forte viscosité des polymères a pour conséquences les hypothèses suivantes

- L'inertie est négligeable devant la viscosité (donc pas d'écoulement de polymère turbulent),
- Les forces de masse sont (en général) négligeables.

Pour illustrer ces hypothèses on observe les ordres de grandeurs des valeurs caractéristiques intervenant dans le procédé d'injection [3] :

Ordres de grandeurs dans le procédé d'injection			
Géométrie	Longueur	[m]	0,1-1
	Largeur	[m]	0,1-1
	Épaisseur	[m]	0,001-0,01
Matériau	Densité	[kg.m <sup>-3</sup> ]	1000
	Viscosité	[Pa.s <sup>-1</sup> ]	100-1000
Variables	Vitesses	[m.s <sup>-1</sup> ]	0,1-1
	Pression	[N.m <sup>-2</sup> ]	10 <sup>7</sup> -10 <sup>8</sup>

### Notions de contact

Le contact est, avec le frottement, un des phénomènes qui caractérise l'interaction de deux corps, ou de deux parties différentes d'un même corps.

Dans notre étude, on se restreint au cas du contact bilatéral. En effet, lors de la phase de remplissage les parois internes du moule d'injection sont en contact avec le polymère fondu.

Lors de la modélisation, il est possible de simuler ce phénomène en imposant différentes conditions de contact.

- Le contact bilatéral collant

Dans ce cas, une fois le contact établi entre les deux corps, il est impossible de les décoller. Cette condition est principalement utilisée pour simuler des cas de traction ou d'injection de métaux fondus. Elle se traduit par l'égalité des vitesses des deux corps à l'interface.

## CHAPITRE 2 : Étude de l'écoulement d'un fluide newtonien

---

Dans notre étude, le moule étant immobile (pendant la phase de remplissage), cette condition correspond à la condition de Dirichlet.

- Le contact bilatéral glissant

Le contact bilatéral glissant modélise une adhésion parfaite entre les deux corps, l'un des deux corps glisse par rapport à l'autre sans jamais quitter le contact. L'adhésion à la paroi résume les effets résultant du contact d'un fluide avec une paroi solide. Cette condition traduit bien le phénomène d'écoulement des polymères. Elle se traduit par la condition suivante

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.4.2)$$

Cette condition est appelée condition d'imperméabilité ou de non-pénétration.

### Notions de frottement

Le frottement intervient à tous les niveaux des procédés de mise en forme. En effet, la géométrie finale du produit formé dépend du frottement.

On trouve par ailleurs de nombreux travaux concernant ces aspects très importants en mise en forme des polymères [13].

Il existe différentes lois ou modèles de frottement permettant de calculer la contrainte tangentielle en fonction des nombreux paramètres du contact (vitesse de glissement, rugosité, contrainte normale,...).

En fonction du modèle considéré, on peut modéliser différents phénomènes physiques comme le glissement, le décollement ou l'adhérence.

On peut citer par exemple le modèle de Coulomb qui prend en compte les trois phénomènes évoqués.

Le frottement est l'existence de forces s'exerçant sur une interface entre deux corps, et tendant à s'opposer au mouvement tangentiel relatif entre eux. Cela se traduit par l'existence d'une contrainte tangentielle notée  $\sigma_t$ .

On modélise le frottement à l'interface polymère/paroi (c'est à dire sur la frontière  $\Gamma$ ) par une loi de frottement non linéaire de type Tresca.

- *Modèle de Tresca*

C'est une loi à seuil fixe  $\sigma_{critique}$  que l'on note  $g$ . Ce nom provient de l'analogie faite avec le critère de Tresca.  $\sigma_{critique}$  représente la contrainte tangentielle critique, à partir de laquelle, le glissement s'établit entre différents corps. On a

$$\begin{aligned} |\sigma_t| < g &\Rightarrow u_t = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ |\sigma_t| = g &\Rightarrow \exists k \geq 0 \quad \text{tel que } u_t = -k\sigma_t, \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

— Lorsqu'il y a inégalité, il n'y a pas de frottement, donc la vitesse du fluide est nulle. On parle alors d'**adhérence**.

- Lorsque le seuil est atteint, le fluide et la surface se déplacent tangentiellement l'un par rapport à l'autre, il y a **glissement** et  $u_t$  est opposée à  $\sigma_t$  comme on peut le voir sur la figure 2.2.

Cette condition représente deux situations physiques qui sont l'adhérence (quand  $u_t = 0$ ) et le glissement (quand  $u_t \neq 0$ ).

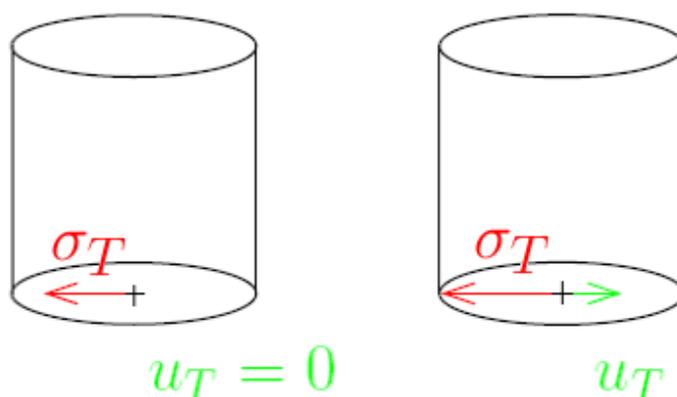


FIGURE 2.2 – Représentation du modèle de frottement de Tresca

En résumé, la frontière  $\Gamma$  du domaine représentée par la Figure 1.2 page 4 est soumise aux conditions de non-pénétration ou d'imperméabilité données par la relation (2.4.2) et la condition non linéaire de Tresca (2.4.3). Ces conditions permettent la fermeture du système  $(P_0)$  qui s'écrit alors

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{ll} -2\mu \operatorname{div} \underline{\underline{\varepsilon}}(u) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ |\sigma_t| < g \Rightarrow u_t = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ |\sigma_t| = g \Rightarrow u_t = -k\sigma_t & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$



# Chapitre 3

## Formulation variationnelle du problème

### 3.1 Problème en vitesse pression

Nous donnons ici quelques remarques utiles à l'établissement du problème variationnel associé au problème (P<sub>0</sub>), et on précise que l'on choisit de travailler plutôt avec le tenseur des contraintes pour faciliter les calculs. On se ramène par la suite au tenseur des déformations par le biais de la loi de comportement (2.3.1).

**Remarque 3.1.1.** Le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

**Remarque 3.1.2.** Le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est symétrique,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}.$$

**Remarque 3.1.3.** Soit  $w$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^d$ , on a la relation suivante

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(u) : (\nabla w + \nabla w^\top) = 2\underline{\underline{\varepsilon}}(u) : \nabla w. \quad (3.1.1)$$

#### Preuve

En adoptant la convention de sommation sur les indices répétés ou convention d'Einstein, on a

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}^\top(u) : \nabla w &= \varepsilon_{ji}(u) w_{i,j} \\ &= \varepsilon_{ij}(u) w_{j,i} && \text{(indices muets)} \\ &= \varepsilon_{ji}(u) w_{j,i} && \text{(par symétrie de } \underline{\underline{\varepsilon}} \text{)} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}(u) w_{i,j} &= \varepsilon_{ij}(u) (w_{i,j} + w_{j,i}) \\ \varepsilon_{ij}(u) w_{i,j} &= \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(w) \end{aligned}$$

□

### CHAPITRE 3 : Formulation variationnelle du problème

---

**Remarque 3.1.4.** Sur  $\Gamma$ , la dernière composante de  $u$  est nulle :

$$u_d = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (d = 2, 3) \quad (3.1.2)$$

En effet, que l'on considère un domaine à 2 ou 3 dimensions, d'après la condition de non-perméabilité (2.4.2), on a

$$u_1.n_1 + u_2.n_2 = 0, \quad (\text{ou } u_1.n_1 + u_2.n_2 + u_3.n_3 = 0),$$

où  $n = (0, \pm 1)$  (ou  $n = (0, 0, -1)$ ) est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de  $\Gamma$ . On en déduit donc que

$$u_d = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (d = 2, 3)$$

**Remarque 3.1.5.** Le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  se décompose en une partie tangentielle  $\sigma_t$  est une partie normale  $\sigma_n$  :

$$\sigma_n = (\sigma.n).n = \sigma_{ij}n_jn_i \quad (3.1.3)$$

$$\sigma_{t_i} = \sigma_{ij}n_j - \sigma_n n_i. \quad (3.1.4)$$

**Remarque 3.1.6.** La condition limite de Tresca (2.4.3) est équivalente à la relation suivante

$$u_t \sigma_t + g|u_t| = 0, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (3.1.5)$$

Pour la démonstration voir par exemple [9].

On détermine maintenant le problème variationnel associé au problème  $(P_0)$ . Pour cela on commence par introduire le cadre fonctionnel.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0, v.n|_{\Gamma} = 0\}, \\ \mathbf{V}_{\text{div}} &= \{v \in \mathbf{V}, \text{div} v = 0 \text{ dans } \Omega\}, \\ L_0^2(\Omega) &= \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0\}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.1.1.** Soient  $(u, p)$ , des solutions du problème  $(P_0)$ , alors elles vérifient la formulation variationnelle suivante

$$(PVP_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbf{V}_{\text{div}}, p \in L_0^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(u, v - u) - (p, \text{div}(v)) + j(v) - j(u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V}. \end{array} \right.$$

avec

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(u) \underline{\underline{\varepsilon}}(v) \, d\Omega,$$

$$(p, \text{div}(v)) = \int_{\Omega} q \, \text{div}(v) \, d\Omega,$$

$$j(v) = \int_{\Omega} g|v|d\sigma,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} fv d\Omega.$$

**Preuve** (cas bidimensionnel)

On commence par écrire la loi de comportement ( 2.3.1) en adoptant toujours la convention d'Einstein. On note que dans la suite on utilisera cette convention sauf mention contraire.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0.$$

On se donne une fonction test  $v$  "suffisamment régulière", définie de  $\Omega$  à valeurs réelles et appartenant à un espace fonctionnel  $V$  que l'on précisera ensuite. On multiplie par la composante  $v_i$  l'équation aux dérivées partielles ci-dessus puis on intègre sur  $\Omega$ . Il vient

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega, \quad \forall v \in V.$$

On utilise la formule de Green afin de transformer le membre de gauche de l'égalité précédente. Ceci conduit à

$$+ \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i d\sigma = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega, \quad \forall v \in V.$$

On remarque que les conditions sur  $u$  n'apparaissent pas dans cette équation, par suite, on choisit  $v$  de sorte que  $v|_{\Gamma_0} = 0$  et  $v.n|_{\Gamma} = 0$ . On pose  $v = v - u$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (v_{i,j} - u_{i,j}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) d\sigma = \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i) d\Omega, \quad \forall v \in V \quad (*)$$

On s'intéresse maintenant au terme de bord.

On a  $v_i - u_i = 0$  sur  $\Gamma_0$  et  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_0$ , d'où

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) d\sigma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) d\sigma.$$

Et, en utilisant la remarque (3.1.5), il vient

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) d\sigma = \int_{\Gamma} \sigma_{t_i} (v_i - u_i) d\sigma + \int_{\Gamma} \sigma_n n_i (v_i - u_i) d\sigma.$$

Comme ,  $(v_i - u_i)n_i = 0$ , on a

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) d\sigma = \int_{\Gamma} \sigma_{t_i} (v_i - u_i) d\sigma.$$

De plus, d'après la remarque ( 3.1.2), on a  $v_2 - u_2 = 0$  sur  $\Gamma$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) d\sigma &= \int_{\Gamma} \sigma_{t_i} (v_i - u_i) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{t_i} (v_t - u_t) dx_1. \end{aligned}$$

### CHAPITRE 3 : Formulation variationnelle du problème

---

Par suite, on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (v_{i,j} - u_{i,j}) d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{t_i} (v_i - u_i) d\sigma = \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i) d\Omega, \quad \forall v \in V.$$

Pour pouvoir obtenir la relation souhaitée, on additionne et on soustrait au premier membre de cette dernière égalité, le terme suivant

$$\int_{\Gamma} g (|v_t| - |u_t|) dx_1.$$

Posons

$$I = \int_{\Gamma} \sigma_t (v_t - u_t) dx_1.$$

On a alors,

$$I = \int_{\Gamma} \sigma_t (v_t - u_t) dx_1 + \int_{\Gamma} g (|v_t| - |u_t|) dx_1 - \int_{\Gamma} g (|v_t| - |u_t|) dx_1.$$

Et d'après la remarque 3.1.6,  $u_t \sigma_t + g|u_t| = 0$  sur  $\Gamma$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \sigma_t v_t dx_1 + \int_{\Gamma} g |v_t| dx_1 - \int_{\Gamma} g (|v_t| - |u_t|) dx_1 \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_t v_t dx_1 + \int_{\Gamma} g |v_t| dx_1 - j(v) + j(u). \end{aligned}$$

On pose

$$\alpha = \int_{\Gamma} \sigma_t v_t dx_1 + \int_{\Gamma} g |v_t| dx_1.$$

On remarque que sur  $\Gamma$

$$\sigma_t v_t \geq -|\sigma_t| |v_t| \geq -g |v_t| \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 0,$$

Par suite, en revenant à la relation (\*), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (v_{i,j} - u_{i,j}) d\Omega + j(v) - j(u) \geq \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i) d\Omega, \quad \forall v \in V.$$

Or d'après la loi de comportement ( 2.3.1),  $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} - p\delta_{ij}$ , d'où

$$\int_{\Omega} (2\mu\varepsilon_{ij} - p\delta_{ij}) (v_{i,j} - u_{i,j}) d\Omega + j(v) - j(u) \geq \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i) d\Omega.$$

Et, en remarquant que

$$\begin{aligned} p\delta_{ij} (v_{i,j} - u_{i,j}) &= p (v_{i,i} - u_{i,i}) \\ &= p (\mathbf{div}(v) - \mathbf{div}(u)) \\ &= p \mathbf{div}(v), \quad (\text{car } u \in \mathbf{V}_{\mathbf{div}}) \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon_{ij}(v_{i,j} - u_{i,j}) d\Omega - \int_{\Omega} p(v_{i,i} - u_{i,i}) d\Omega + j(v) - j(u) \geq \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i) \Omega.$$

De plus d'après la remarque 3.1.3,  $2\mu\varepsilon_{ij}(u_i)v_{i,j} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)$ . Donc

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon_{ij}(u_i)\varepsilon_{ij}(v_i - u_i)d\Omega - \int_{\Omega} pv_{i,i}d\Omega + j(v) - j(u) \geq \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i) \Omega.$$

Finalement, en adoptant les notations définies plus haut, on obtient,  $\forall u \in \mathbf{V}_{\text{div}}$

$$a(u, v - u) - (p, \text{div}(v)) + j(v) - j(u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

□

## 3.2 Problème en vitesse

**Remarque 3.2.1.** En prenant  $v \in \mathbf{V}_{\text{div}}$  dans l'inéquation variationnelle précédente, on obtient le problème en vitesse suivant.

**Proposition 3.2.1.** Soit  $u$ , une solution régulière du problème  $(P_0)$ , alors elle vérifie la formulation variationnelle suivante

$$(PV_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbf{V}_{\text{div}} \text{ tels que} \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\text{div}}. \end{array} \right.$$

La démonstration de cette propriété repose sur le même raisonnement que celle de la proposition 3.1.1.

L'existence et l'unicité de ce problème ne sont pas évoquées dans le détail dans ce travail. Cependant, le lecteur intéressé pourra consulter [9] ou [16]. La théorie des inéquations variationnelles fait l'objet de différentes études, on peut citer [11] et [12].

On énonce les hypothèses suivantes permettant de garantir l'unicité du problème  $(PV_0)$

- $\mathbf{V}_{\text{div}}$  est un espace de Hilbert,
- $a(., .)$  est une forme bilinéaire continue et coercive sur  $\mathbf{V}_{\text{div}}$ ,
- $j(.)$  est une fonction convexe semi-continue inférieurement et propre,
- $L(.)$  est une forme linéaire continue sur  $\mathbf{V}_{\text{div}}$ .

Sous ces hypothèses, d'après le théorème de Lions-Stampachia [11], il existe un unique  $u \in \mathbf{V}_{\text{div}}$  solution du problème  $(PV_0)$ . De plus,  $a(., .)$  est symétrique, alors  $u$  est solution du problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbf{V}_{\text{div}} \text{ tels que :} \\ \mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\text{div}}. \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

où  $\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - L(v)$ .

Deux difficultés sont à surmonter dans la résolution du problème de minimisation ( 3.2.1) :

### CHAPITRE 3 : Formulation variationnelle du problème

- imposer la contrainte d'incompressibilité  $\text{div}(u) = 0$ ,
- la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  est non-différentiable.

Pour la première difficulté, il est possible d'utiliser un multiplicateur de Lagrange, que l'on notera  $q$ , et qui s'identifie à la pression.

L'approximation des espaces de fonctions à divergence nulle ( $\mathbf{V}_{\text{div}}$ ) joue un rôle particulier dans la mécanique des fluides incompressibles. Cependant l'approximation de ces espaces est un problème difficile dans le contexte de la méthode des éléments finis. Le lecteur intéressé pourra consulter [14].

En écrivant le Lagrangien du problème, on ajoute de nouvelles inconnues au système qui sont les multiplicateurs de Lagrange.

Le problème de minimisation (3.2.1) se réduit au problème de point-selle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p, \lambda) \in \mathbf{V} \times L_0^2(\Omega) \times \mathcal{Q} \text{ tel que :} \\ \mathcal{L}(u, q, \mu) \leq \mathcal{L}(u, p, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, p, \lambda), \quad \forall (v, q, \mu) \in \mathbf{V} \times L_0^2(\Omega) \times \mathcal{Q} \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

où

$$\mathcal{L}(v, q, \mu) = \frac{1}{2}a(v, v) - \int_{\Omega} q \text{div}(v) d\Omega + \int_{\Gamma} \mu v_t d\sigma - L(v),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \{ \mu \in [L^2(\Gamma)]^2, \quad |\mu| \leq g \} \\ &= \left\{ \mu \in [L^2(\Gamma)]^2, \quad \int_{\Gamma} \mu v_t d\sigma - \int_{\Gamma} g |v_t| d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Afin de minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{J}$ , on introduit une nouvelle variable  $\varphi$ , tel que :  $\varphi = v_t$ . Ainsi le problème de minimisation (3.2.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \Phi) \in \Pi \text{ tel que :} \\ \Sigma(u, \Phi) \leq \Sigma(v, \varphi), \quad \forall (v, \varphi) \in \Pi. \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

où

$$\Pi = \{ (v, \varphi) \in \mathbf{V}_{\text{div}} \times L^2(\Gamma), \quad \varphi = v_t \}$$

et

$$\Sigma(v, \varphi) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - L(\varphi)$$

Et par suite la minimisation de  $\Sigma$  revient à résoudre le problème de point-selle suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \Phi, \lambda) \in \Pi \times L^2(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \mathcal{L}_r(u, \varphi, \mu) \leq \mathcal{L}_r(u, \Phi, \lambda) \leq \mathcal{L}_r(v, \Phi, \lambda), \quad \forall (v, \phi, \mu) \in \Pi \times L^2(\Gamma). \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

où

$$\mathcal{L}_r(v, \varphi, \mu) = \Sigma(v, \varphi) + \int_{\Gamma} (v_t - \varphi) \mu d\sigma + \frac{r}{2} \|\varphi - v_t\|_{0,\Gamma}^2$$

Enfin, pour résoudre le problème de point-selle (3.2.4), on fera appel à l'algorithme d'Uzawa-Relaxation.

### 3.3 Formulation variationnelle du problème modèle

Dans cette section, on donne la formulation variationnelle du problème de Stokes ( $P_2$ ) dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  munit de conditions aux limites de Dirichlet homogène sur la frontière  $\Gamma$  (voir figure 4.2 page 27). Ainsi le problème s'écrit

$$(P_2) \begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Pour pouvoir écrire ( $P_2$ ) sous forme faible, on a besoin de l'espace fonctionnel  $L_0^2(\Omega)$  défini plus haut, et de l'espace  $H_0^1(\Omega)$  défini par

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Afin de discrétiser ces équations par la méthode des éléments finis, on commence par donner la formulation variationnelle associée à ce problème. La méthode étant similaire on ne donne pas la démonstration

$$(PVP_2) \begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) - (p, \operatorname{div}(v)) = L(v), \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ (q, \operatorname{div}(u)) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Le caractère bien posé de ce problème repose sur le résultat suivant (voir [10]).

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 2$ . Alors l'opérateur*

$$\operatorname{div}: [H_0^1(\Omega)]^d \longrightarrow L_0^2(\Omega) \quad \text{est surjectif.} \quad (3.3.1)$$

La forme  $a(\cdot, \cdot)$  est continue et coercive. On a, pour tout  $u, v$  dans  $[H_0^1(\Omega)]^d$

$$a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx = \mu \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i.$$

D'après l'inégalité d'Hölder, il vient,

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq \mu \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \|\nabla u_i\|_{L(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L(\Omega)} \\ &\leq \mu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq \mu \|u\|_{H^1(\Omega)^d} \|v\|_{H^1(\Omega)^d}, \quad \forall u, v \in [H_0^1(\Omega)]^d \end{aligned}$$

La condition *inf-sup* est satisfaite et  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive. Par suite le problème est bien posé.



# Chapitre 4

## Discrétisation par éléments finis

### 4.1 Résolution numérique

La méthode des éléments finis mixtes consiste à calculer la solution de la formulation variationnelle du problème de Stokes non plus dans les espaces continus  $\mathbf{V}$  et  $L^2_0(\Omega)$  (de dimension infinie) mais dans des espaces discrets de dimensions finies.

Il est bien évidemment nécessaire que les fonctions  $(u_h, p_h)$  convergent vers les solutions continues  $(u, p)$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour obtenir cette convergence est que le problème soit consistant, c'est-à-dire que l'espace d'approximation "tende" vers l'espace continu quand  $h$  tend vers zéro. Ce sera le cas puisque les espaces d'approximation dans lesquels nous travaillerons sont des espaces de polynômes.

Du fait du couplage entre les champs de vitesse et de pression, la condition de consistance ne suffit plus, il faut lui adjoindre une condition de stabilité spatiale appelée *condition de stabilité inf-sup* ou condition de Babuška-Brezzi [2, 4].

Cette condition traduit le fait que les espace  $V_h$  et  $\mathbb{L}_h$  ne peuvent pas être choisis indépendamment.

C'est pour satisfaire cette condition que nous utilisons des éléments de type  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$ .

### 4.2 Discrétisation par le MINI-élément

#### 4.2.1 Introduction

L'analyse du MINI-élément ou  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$  est due aux travaux de Arnold, Brezzi et Fortin [1] pour des écoulement de Stokes incompressibles.

Ici nous proposons l'utilisation d'une méthode mixte basée sur une résolution simultanée des champs de vitesse et de pression par des éléments de type MINI-élément.

Afin de satisfaire *la condition de stabilité inf-sup*, un degré de liberté (dit "bulle") supplémentaire en vitesse est introduit au centre de chaque élément du maillage.

On a choisit ce type d'élément car l'élément mixte compatible de plus petit degré d'interpolation est le MINI-élément (Figure 4.1).

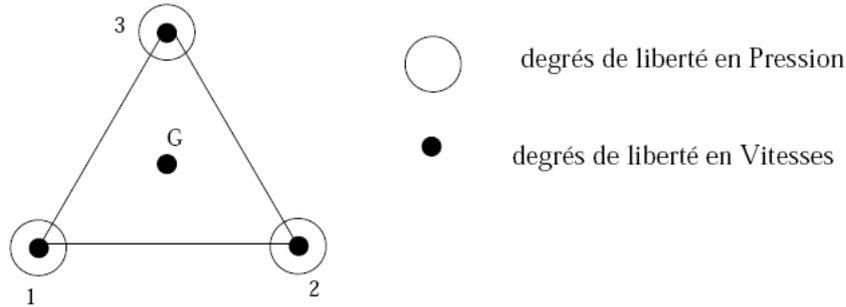


FIGURE 4.1 – L'élément  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$ .

Ce choix d'élément est aussi motivé par la stabilité qu'il confère. Stabilité tout d'abord spatiale, puisqu'il satisfait la condition de Babuška-Brezzi, mais stabilité également numérique, puisque l'on verra par la suite que la condensation de la bulle améliore le conditionnement de la matrice du système linéaire à résoudre.

C'est un élément triangulaire linéaire pour lequel les champs de vitesse et de pression sont définis par

- la pression est linéaire et continue,
- la vitesse se décompose de manière unique en une partie linéaire  $vl$  et une partie  $vb$  correspondant à l'ajout d'un degré de liberté interne : la bulle.

La composante bulle de la vitesse est introduite essentiellement pour contrôler la condition d'incompressibilité. Elle est interpolée par une fonction bulle valant 1 au centre de l'élément et 0 sur sa frontière, donc par un polynôme de degré 3.

### 4.2.2 Discrétisation du problème modèle

Afin de vérifier la stabilité de l'élément mini, nous étudierons dans cette section la discrétisation du problème (PVP<sub>2</sub>). Bien que ce problème soit relativement simple, il nous a permis d'illustrer les effets numériques liés à la condition *inf-sup*.

#### Description du problème

Il s'agit de l'écoulement d'un fluide dans un conduit avec un profil de vitesse parabolique imposée en entrée (voir Figure.4.2). Ce problème possède une solution analytique. En effet, si  $H$  est la hauteur du domaine, la solution analytique de l'équation de Stokes est

$$u = (u_1, u_2) = \left( \frac{4x_2}{H^2}(H - x_2), 0 \right); \quad \text{et} \quad p = -\frac{4x_1}{H^2} + \text{constante}. \quad (4.2.1)$$

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega$  et  $T$  un triangle de  $\mathcal{T}_h$ . Soient  $\mathcal{X}_h$  et  $\mathcal{M}_h$  deux sous espaces de dimension finie approximant respectivement  $[H_0^1(\Omega)]^2$  et  $L_0^2(\Omega)$ .

Ces sous-espaces d'approximations sont définis sur  $\mathcal{T}_h$

$$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} T.$$

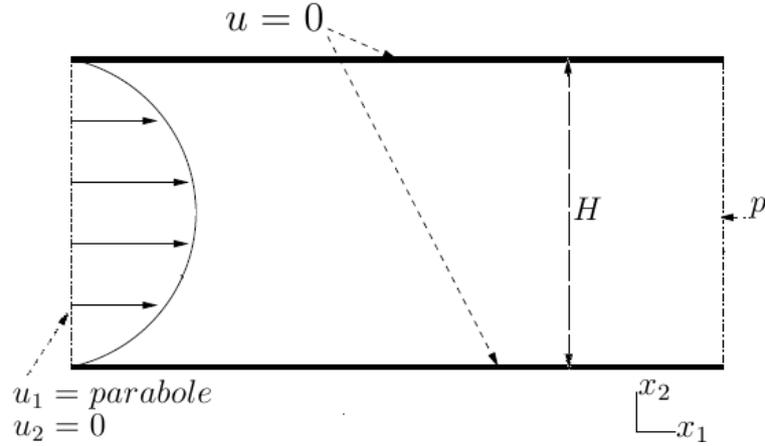


FIGURE 4.2 – Géométrie et conditions aux limites du problème modèle.

On désigne par  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , les coordonnées barycentriques par rapport aux sommets de  $T$ . La fonction bulle que l'on note  $b$ , associée au triangle  $T$  est définie par

$$b = \prod_{i=1}^3 \lambda_i.$$

On définit l'espace d'approximation associé à la fonction bulle ainsi que les espaces  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{X}_h$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h &= \{v_h \in [\mathcal{C}^0(\Omega)]^2, \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T = xb\}, \\ \mathcal{X}_h &= \{v_h \in [\mathcal{C}^0(\Omega)]^2, v_h|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_\Gamma = 0\} \oplus \mathcal{B}_h, \\ \mathcal{M}_h &= \{q_h \in \mathcal{C}^0(\Omega), q_h|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}_h, \int_\Omega q_h d\Omega = 0\} \oplus \mathcal{B}_h. \end{aligned}$$

On considère le problème approché suivant

$$(\text{PVP}_2)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) - (p_h, \text{div}(v_h)) = L(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{X}_h, \\ (q_h, \text{div}(u_h)) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}_h. \end{array} \right.$$

avec  $v_h$  et  $p_h$  données par

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \phi_i(\mathbf{x})u_i + \phi_b(\mathbf{x})u_b, \quad (4.2.2)$$

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \phi_i(\mathbf{x})p_i, \quad (4.2.3)$$

où  $u_b$  est le terme associé à la bulle. Sur un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , les fonctions de bases  $\phi_i$  sont données par

$$\phi_1(\mathbf{x}) = 1 - x_1 - x_2, \quad \phi_2(\mathbf{x}) = x_1, \quad \phi_3(\mathbf{x}) = x_2, \quad \phi_b(\mathbf{x}) = 27\phi_1(\mathbf{x})\phi_2(\mathbf{x})\phi_3(\mathbf{x})$$

## CHAPITRE 4 : Discrétisation par éléments finis

---

On pose

$$U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_{ib} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

$$F_i = \begin{pmatrix} f_i \\ f_{ib} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

Le problème discret  $(PVP_2)_h$  est équivalent à chercher la solution  $(U, P)$  du système suivant

$$\begin{bmatrix} K & 0 & B_1^t \\ 0 & K & B_2^t \\ B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

où les matrices  $K$  et  $B$  ont pour coefficients

$$K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad \text{et} \quad B_{ki} = (\phi_i, \phi_k)$$

En substituant dans la première équation de  $(PVP_2)_h$ , le couple  $(u_h, p_h)$  par les expressions (4.2.3)-(4.2.2), et en prenant  $v_h = \phi_i$  (car l'équation du problème discret  $(PVP_2)_h$  est vraie  $\forall v_h \in \mathcal{X}_h$ ), on détermine la matrice de rigidité élémentaire  $K$  (sur un élément).

$$K_{ij} = \int_T \mu \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, b.$$

On donne directement les composantes de la matrice de rigidité sur un élément en adoptant la notation suivante

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad u_{ij} = y_i - y_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

et

$$x_T = \begin{bmatrix} x_{32} \\ x_{13} \\ x_{21} \end{bmatrix} \quad y_T = \begin{bmatrix} y_{23} \\ y_{31} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$

Un calcul direct donne

$$K_{ij} = \frac{\mu}{4|T|} (y_i y_j + x_i x_j), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

La matrice de rigidité étant symétrique il reste à calculer les termes liés à la bulle.

$$K_{bj} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Pour  $i = j = b$  (terme diagonal), on a

$$\begin{aligned} K_{bb} &= \mu \int_T 27^2 \nabla(\phi_1 \phi_2 \phi_3) \cdot \nabla(\phi_1 \phi_2 \phi_3) dx dy \\ &= \frac{81}{10} |T| \mu (|\nabla \phi_1|^2 + |\nabla \phi_2|^2 + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2) \end{aligned}$$

De même pour la matrice de divergence  $B$  qui s'obtient par une intégration

$$B = [B_1 \ B_2] = \frac{|T|}{3} \begin{bmatrix} s \nabla \phi_1 & s \nabla \phi_2 & s \nabla \phi_3 & -t \nabla \phi_1 \\ s \nabla \phi_1 & s \nabla \phi_2 & s \nabla \phi_3 & -t \nabla \phi_2 \\ s \nabla \phi_1 & s \nabla \phi_2 & s \nabla \phi_3 & -t \nabla \phi_3 \end{bmatrix}$$

où  $s = \frac{1}{3}$  et  $t = \frac{9}{20}$ .

On pose

$$\bar{B}_i = \frac{|T|}{3} \begin{bmatrix} \phi_{1,i} & \phi_{2,i} & \phi_{3,i} \\ \phi_{1,i} & \phi_{2,i} & \phi_{3,i} \\ \phi_{1,i} & \phi_{2,i} & \phi_{3,i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

et

$$\bar{B}_{ib} = \frac{9|T|}{20} \begin{bmatrix} \phi_{1,i} \\ \phi_{2,i} \\ \phi_{3,i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

de sorte que

$$B_i = [\bar{B}_i \quad \bar{B}_{ib}].$$

Ensuite, reste à éliminer les termes liés à la bulle ( $u_{1b}$  et  $u_{2b}$ ) pour obtenir le système linéaire à résoudre.

Le système ( 4.2.4) est équivalent à

$$\begin{bmatrix} K & 0 & B_1^t \\ 0 & K & B_2^t \\ B_1 & B_2 & K_{bb}^{-1}(\bar{B}_{1b}\bar{B}_{1b}^t + \bar{B}_{2b}\bar{B}_{2b}^t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ K_{bb}^{-1}(\bar{B}_{1b}f_{1b} + \bar{B}_{2b}f_{2b}) \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Dès lors la résolution du système ( 4.2.5) est réalisée par une méthode classique.

## 4.3 Tests numériques

### 4.3.1 Problème modèle

Dans cette section, on présente les résultats numériques obtenus à partir d'une procédure réalisée sous *Matlab*.

On considère le domaine bidimensionnel  $\Omega = (0, 0.1) \times (0, 0.1)$ . On a discrétisé  $\Omega$ , d'abord par un premier maillage grossier (25 noeuds et 36 éléments). Les conditions limites imposées sont celles présentées sur la figure 4.2

Les tests sont réalisés avec l'élément MINI.

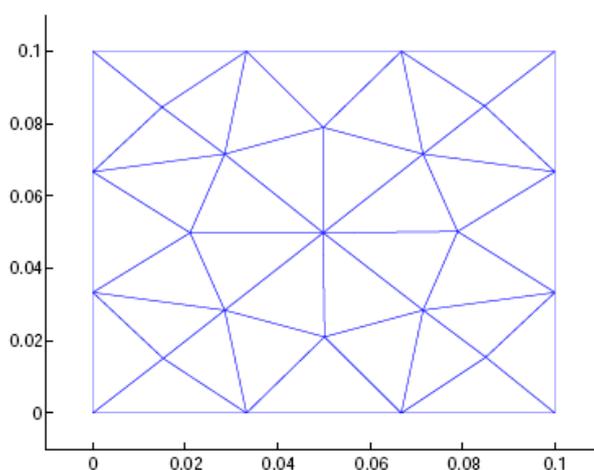


FIGURE 4.3 – Maillage grossier du problème de Stokes avec conditions de Dirichlet.

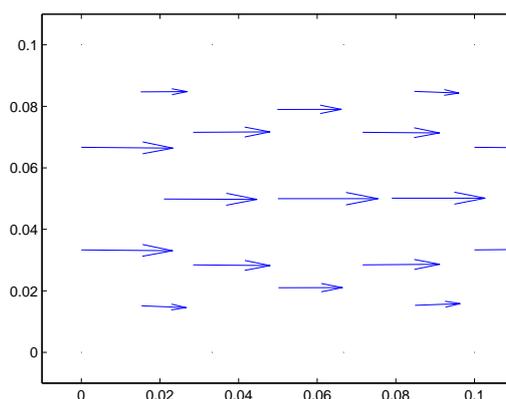


FIGURE 4.4 – Champ de vitesse dans le domaine  $\Omega$ .

On visualise le champ de vitesse  $u$  à l'aide de la fonction *Matlab quiver* (Figure.4.4). On constate que la vitesse est bien nulle sur la frontière  $\Gamma$ . Cependant, étant donné un faible

nombre de maille, on peut difficilement distinguer le profil de vitesse imposé en entrée sur  $\Gamma_e$ .

On peut également visualiser les isobares dans le domaine  $\Omega$ .

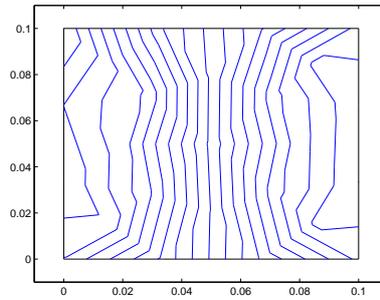


FIGURE 4.5 – Isobares dans le domaine  $\Omega$ .

Voici maintenant les résultats obtenus sur un maillage plus fin.

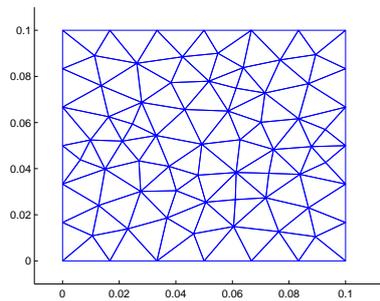


FIGURE 4.6 – Maillage moyen (75 noeuds et 125 éléments).

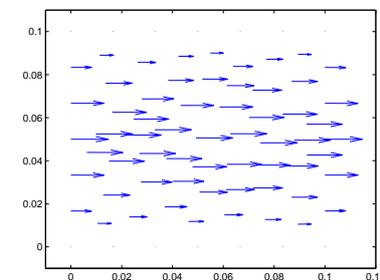


FIGURE 4.7 – Champ de vitesse dans le domaine  $\Omega$ .

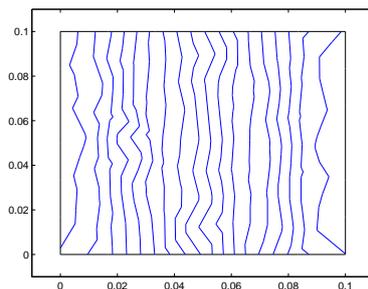


FIGURE 4.8 – Isobares dans  $\Omega$  (maillage moyen).

Pour pouvoir apprécier la stabilité apportée par l'élément  $P1_{bulle}/P1$ , on a choisit de faire un test en utilisant des éléments de type  $P1/P1$  qui ne respectent pas la conditions  $inf - sup$  (voir [10]).

Les tests réalisés avec l'élément  $P1/P1$ , donnent des solutions satisfaisantes pour le champ de vitesse (voir figure 4.9) mais un champ de pression instable (voir Figure.4.10)

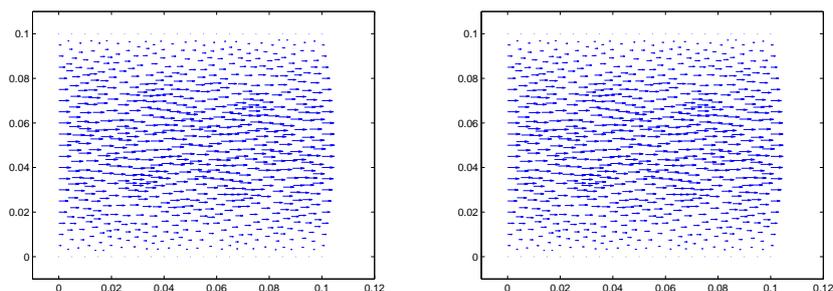


FIGURE 4.9 – Comparaison des champs de vitesse : à gauche  $P1 + /P1$ , à droite  $P1/P1$ .

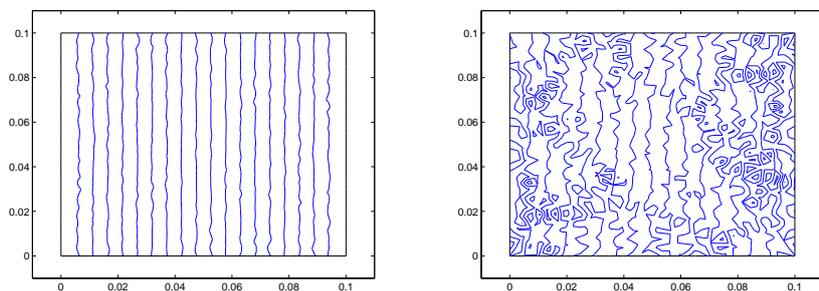


FIGURE 4.10 – Comparaison des isobares : à gauche  $P1 + /P1$ , à droite  $P1/P1$ .

Ce test a été réalisé sur un maillage plutôt fin (728 noeuds et 1374 éléments). La solution en pression est polluée par la présence de pressions parasites. Dans ce cas, il s'agit de la fonction  $q_h$  qui vaut alternativement  $+1$ ,  $0$  et  $-1$  sur les sommets du maillage.

Pour vérifier la validité des résultats obtenus, une simulation rapide à partir des logiciels *Gambit* et *Fluent* a été réalisée. Cependant, pour pouvoir imposer un profil de vitesse en entrée, il faut créer un fichier de type UDF (User defined function). En effet, on doit écrire un script contenant un code qui sera interprété par *Fluent* pour appliquer l'équation du profil parabolique en entrée.

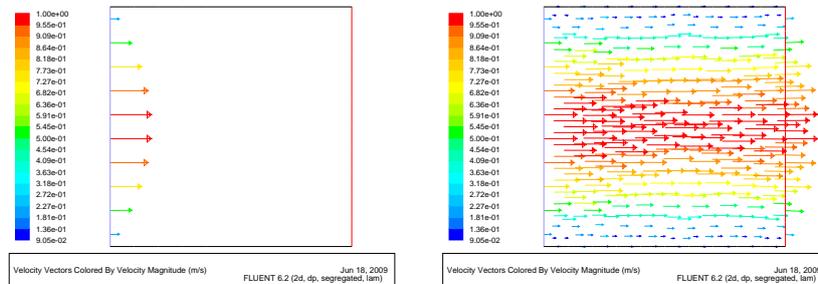


FIGURE 4.11 – Profil de vitesse : à gauche en entrée à droite dans le domaine.

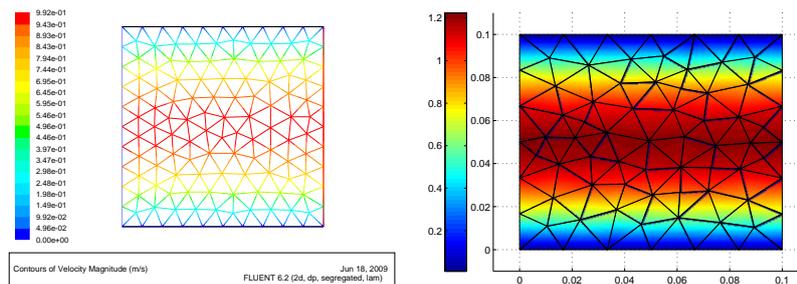


FIGURE 4.12 – Comparaison des vitesses à gauche *Fluent*, à droite *Matlab*

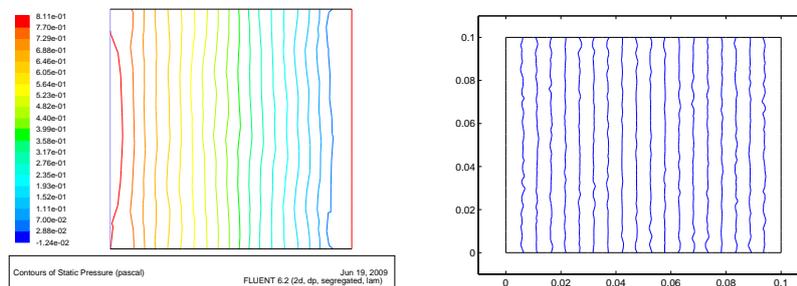


FIGURE 4.13 – Comparaison des pression à gauche *Fluent*, à droite *Matlab*

On constate que les graphiques obtenus sont de même nature et les valeurs sont relativement identiques. Cependant, la dernière figure (4.13) montre bien les limites de la simulation sous *Matlab*.

### 4.3.2 Problème de Tresca

Le test est réalisé sur le même domaine que précédemment. Les conditions aux limites en entrée et en sortie restent inchangées, mais cette fois, on impose les conditions aux limites de Tresca sur la frontière  $\Gamma$ . De plus, pour pouvoir constater le phénomène de glissement sur  $\Gamma$ , on impose un profil de vitesse parabolique dirigé légèrement vers le bas par rapport à l'horizontal donné par

$$u_e = \begin{bmatrix} y(1-y) \\ -y(1-y) \end{bmatrix}$$

On a choisi ce profil afin de forcer  $\sigma_t$  à dépasser  $g$  sans avoir besoin de considérer un domaine avec une géométrie complexe. On obtient les résultats suivants

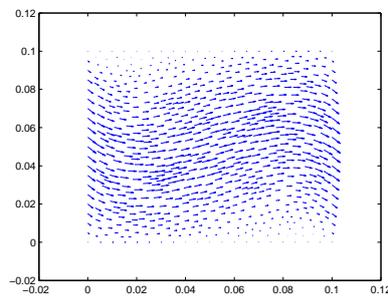


FIGURE 4.14 – Champ de vitesse dans le domaine  $\Omega$ .

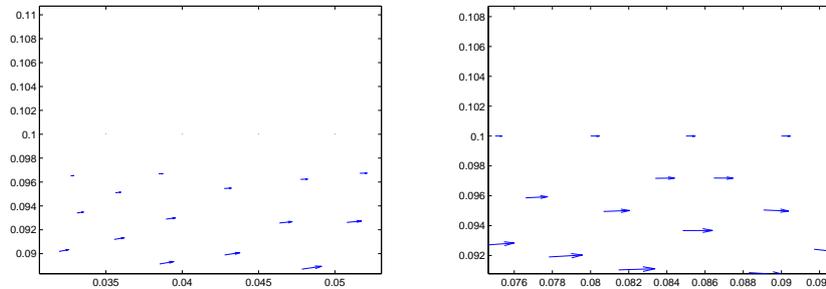


FIGURE 4.15 – Zoom sur le champ de vitesse : à gauche adhérence et à droite glissement.

En imposant le même profil de vitesse, et en autorisant un glissement sur la frontière  $\Gamma$  en utilisant un fichier UDF, on réalise une simulation avec *Fluent*.

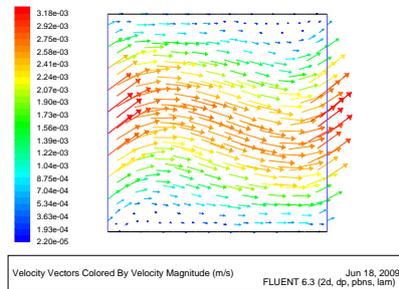


FIGURE 4.16 – Champ de vitesse dans le domaine  $\Omega$ .

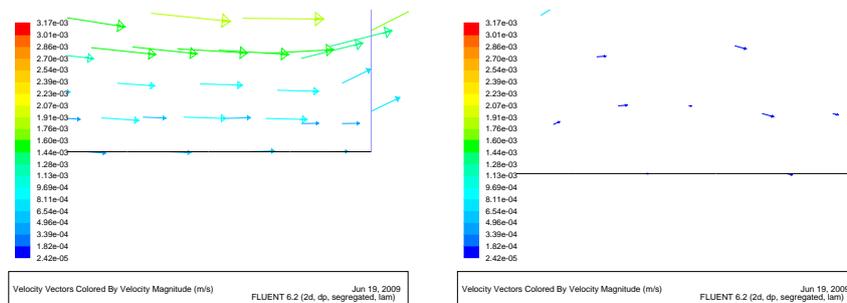


FIGURE 4.17 – Zoom sur le champ de vitesse : à gauche adhérence et à droite glissement

On observe que les résultats obtenus sont assez proches, ce qui confirme la validité de programme réalisé avec *Matlab*.

### 4.3.3 Exemple de simulation

Dans cette section, on réalise une simulation avec *Matlab* et *Fluent* pour visualiser l'écoulement au niveau de la buse d'injection.

On note que les maillages sont ici raffinés au niveau de la contraction.

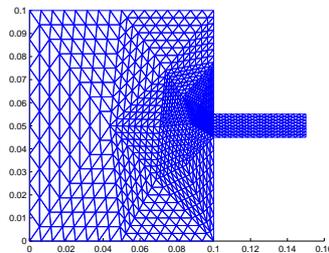


FIGURE 4.18 – Maillage de la contraction (981 noeuds, 1856 triangles).

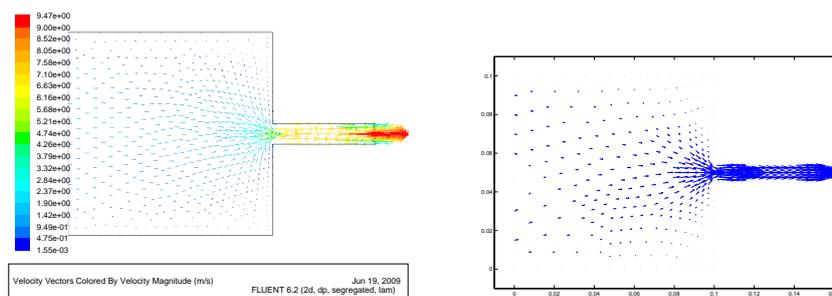


FIGURE 4.19 – Champ de vitesse dans la buse d'injection : à gauche *Fluent* et à droite *Matlab*

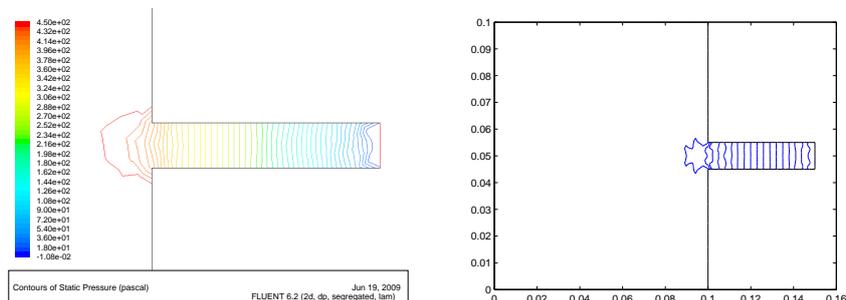


FIGURE 4.20 – Isobares dans la buse d'injection : à gauche *Fluent* et à droite *Matlab*

Tous ces résultats semblent rendre valides les modélisations numériques adoptées. Les résultats numériques demeurent pertinents et peuvent rendre compte du comportement d'un polymère, lors de son écoulement à travers une contraction.

# Conclusion et perspectives

L'objet de ce stage est la simulation numérique et l'étude théorique du procédé d'injection. A travers des simulations dans des géométries simples, nous avons mis en évidence la validité et les limites du code *Matlab* développé.

Le travail réalisé pendant ce stage a permis de montrer la bonne concordance des résultats obtenus.

Nous n'avons pas considéré de couplage thermomécanique dans le cadre de ce projet. Or nous savons, d'après les études menées à ce sujet, que le couplage à un rôle déterminant dans le procédé d'injection des thermoplastiques.

D'un point de vue numérique, il serait intéressant, dans le cadre de travaux futurs sur la modélisation du procédé d'injection de prendre en comptes les différents aspects suivants :

- Prise en compte de la compressibilité, notamment en fin de remplissage,
- Prise en compte du couplage thermomécanique,
- Prise en compte de l'orientation des fibres,
- Utilisation d'autres éléments finis compatibles.



# Annexe

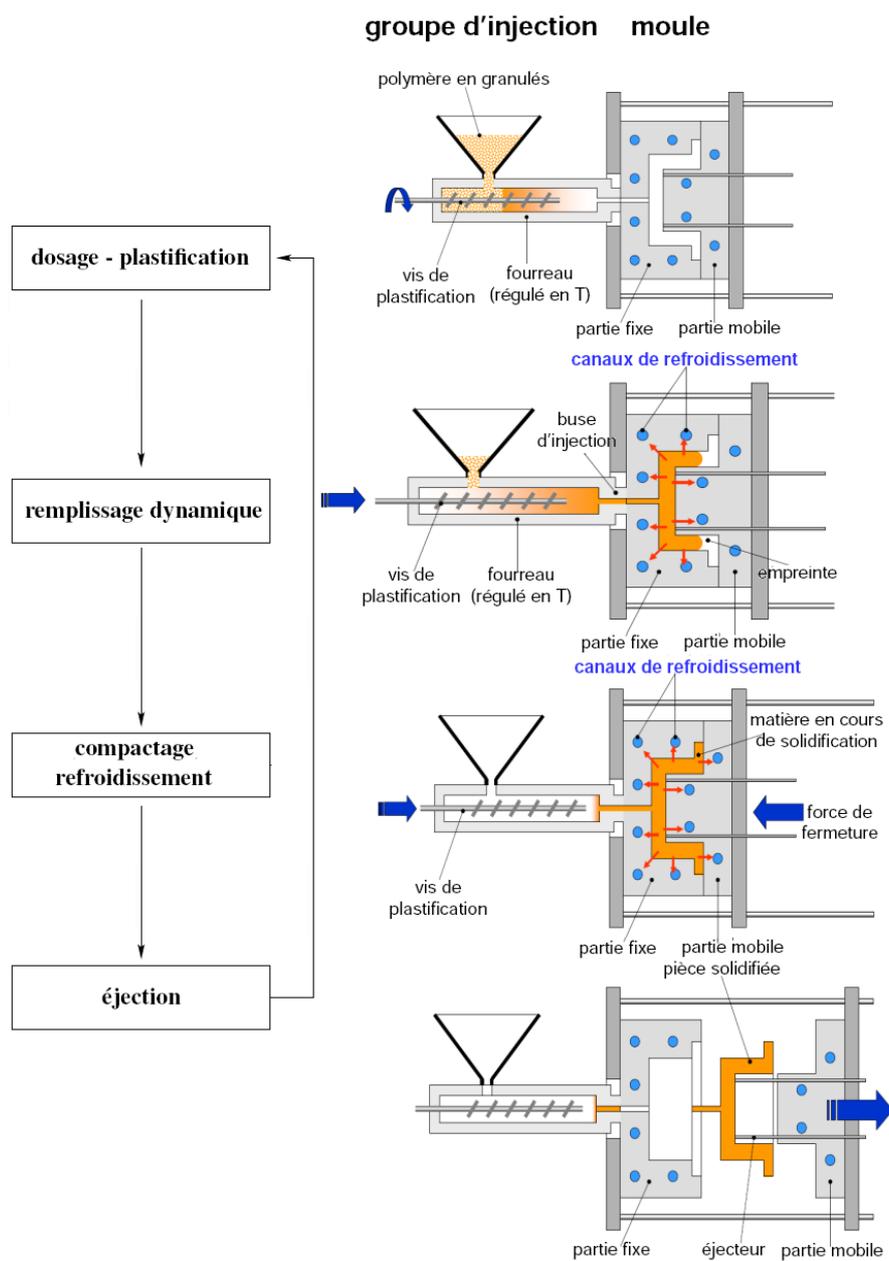


FIGURE 4.21 – Cycle du moulage par injection



# Bibliographie

- [1] D. Arnold, F. Brezzo et M. Fortin, *A stable finite element for the Stokes equations*, *Calcolo*, vol. 21, p. 337–344, 1984.
- [2] I. Babuška, *The finite element method with Lagrangian multipliers*. *Numerische Mathematik*, vol. 20, no 3, p. 179-192, 1973.
- [3] E. Bigot *Simulation tridimensionnelle du remplissage de corps minces par injection* Thèse. ENSMP, 2001.
- [4] H. Brézis, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, no S4, p. 1-26, 1974.
- [5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, 1983.
- [6] J. Chaskalovic, *Méthode des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur*, Lavoisier, 2004. École nationale supérieur des mines de Paris.
- [7] D. Desjardins, M. Touzet-Cortina, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Dunod, 1999.
- [8] A. Dubois, *Determination of the conditions of friction on steel specimen for the cold forging*, *ESDA Vol.3*, pp.215-220,1996.
- [9] R. El Mir, *Étude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides incompressibles essentiellement non-Newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*. Thèse. Université Jean Monnet, Saint-Etienne, 2006.
- [10] A. Ern, *Aide-mémoire Éléments finis*, Dunod, 2005.
- [11] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag 1984.
- [12] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trimolères, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Tome 1, Dunod 1976, Paris.
- [13] J.-M. HAUDIN, *Solidification. Mise en forme des polymères*, Cours matériaux, chapitre XI, 2005.
- [14] F. Hecht, *Outils et algorithmes pour la méthode des éléments finis*, Université Pierre et Marie Curie, 2007.
- [15] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, Philadelphia SIAM, 1988.

- [16] F. Saidi, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Étude mathématiques et asymptotique*. Thèse. Université Jean Monnet, Saint-Etienne, 2004.
- [17] N. Saito, *On the Stokes Equation with the Leak and Slip Boundary Conditions of Friction Type : Regularity of Solutions*, Publications of Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, vol 40 pp. 345–383, 2004.
- [18] M. ZINET, *Modélisation numérique de la cristallisation induite par l'écoulement d'un polymère thermoplastique*, Journée des Doctorants du CETHIL, février 2009.