Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire d'inconnues x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \alpha \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = \beta \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = \gamma \end{cases} \tag{1}$$

1. Écrire le système (1) sous la forme $A\vec{x} = \vec{b}$, avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, que l'on explicitera.

2. Le système (1) admet-il une unique solution pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$?

3. Dans la suite on choisit $\alpha = 1, \beta = -1$ et $\gamma = 2$.

(a) Montrer que A admet une unique factorisation LU où $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure, avec $L_{ii} = 1$ pour tout $i = 1, \dots, 3$ et $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.

(b) Calculer la décomposition LU de A puis résoudre le système (1) en utilisant cette factorisation.

(c) En omettant le coût de calcul associé à la factorisation, expliciter le nombre total d'opérations réalisées dans la résolution du système (1) à la question précédente.

Exercice 2. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ définie sur l'intervalle $[-5, 5]$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation $P(x)$ de cette fonction aux points d'abscisses : $-5, -1, 5, 1$.

2. Rappeler la formule de majoration de l'erreur d'interpolation $E(x)$ en 4 points pour une fonction C^4 sur un intervalle $[a, b]$.

3. Montrer que $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x^2)^5}(5x^4 - 10x^2 + 1)$.

4. Trouver les valeurs (exactes) de x où $f^{(4)}(x)$ est extremum.

5. Vérifier que $f^{(4)}$ est maximum en $x = 0$ et donner la valeur de ce maximum.

6. En déduire que pour la fonction $f(x)$ on a $|E(x)| \leq |(x^2 - 25)(x^2 - 1)|$.

Exercice 3. Soit A une matrice $n \times n$ symétrique et définie positive. On s'intéresse à la résolution du problème $A\vec{x} = \vec{b}$.

1. On introduit la décomposition $A = D + H + V$, où $D = cI$, $c > 0$ et H et V sont deux matrices symétriques, telles que les matrices $D + H$ et $D + V$ soient inversibles. On considère la méthode itérative :

$$(D + H)\vec{x}^{(k+\frac{1}{2})} = -V\vec{x}^{(k)} + \vec{b} \tag{2}$$

$$(D + V)\vec{x}^{(k+1)} = -H\vec{x}^{(k+\frac{1}{2})} + \vec{b}. \tag{3}$$

Exprimer $\vec{x}^{(k+1)}$ en fonction de $\vec{x}^{(k)}$. En déduire que $\lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}$, si et seulement si :

$$\rho\left((D + V)^{-1}H(D + H)^{-1}V\right) < 1.$$

2. (a) Posons $B = D^{-1}H$ et $C = D^{-1}V$. Vérifier que

$$\rho\left((D + V)^{-1}H(D + H)^{-1}V\right) = \rho\left(B(I + B)^{-1}C(I + C)^{-1}\right).$$

(b) Monter que les matrices $B(I + B)^{-1}$ et $C(I + C)^{-1}$ sont symétriques. En déduire que :

$$\rho\left((D + V)^{-1}H(D + H)^{-1}V\right) \leq \rho\left(B(I + B)^{-1}\right)\rho\left(C(I + C)^{-1}\right).$$

(c) Vérifier que l'on a :

$$\rho\left(B(I + B)^{-1}\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}I + B \quad \text{est définie positive.}$$

En déduire que la méthode itérative (2)-(3) converge dès que les matrices $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont définies positives.