CC2 2023 - Correction

Aymeric Jan (aymeric.jan@univ-paris1.fr)

April 2024

1 Rappels de cours

1.1 Sommes

Deux résultats sur les sommes à **apprendre par coeur**.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.2 Matrices

1.2.1 Rappel sur les systèmes linéaires

Un système linéaire est un système de plusieurs équations, chacunes étant des combinaisons linéaires de plusieurs inconnues. Exemple:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Un tel système comme celui décrit dans (1), peut s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$Ax = b, \tag{2}$$

avec $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ une matrice réelle de taille 3×3, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ un vecteur de taille 3 et b un autre vecteur de taille 3.

Un tel système admet une unique solution si et seulement si le déterminant de la matrice A est non nul. Dans notre cas, on a $det(A) = -5$. Ainsi, il existe une seule et unique solution x à notre équation.

1.2.2 Résolution matricielle des systèmes linéaires

Voyons la résolution d'un système linaire du type $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

On procède par combinaison linéaire des lignes de notre matrice et de notre vecteur:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{(A|b)} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3\times L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{5}\times L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2\times L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{5}$$

On a alors le système suivant: $A^{'}x = b^{'}$ avec $A^{'}$ la matrice identité, soit $x = b^{'}$. Ainsi on devine:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

1.2.3 Matrices définie positives

Définition 1.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice symétrique définie positive si les conditions suivantes sont respectées*

1. *Symétrie:* $A^T = A$
2. *Positivité:* $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T Ax \geq 0$
3. *Définie:* $x^T Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Définition 1.2. *L'ensemble des matrices symétrique définie positive est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*

Proposition 1.1. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, A est inversible car par définition, $Ax = 0 \Rightarrow x^T Ax = 0 \Rightarrow x = 0$*

Proposition 1.2. *Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors toutes ses valeurs propres sont strictement positives.*

Proposition 1.3. *Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(A) > 0$ car $\det(A) = \prod_i \lambda_i$ où $(\lambda_i)_i$ est l'ensemble des valeurs propres de A.*

Proposition 1.4. *De même pour la trace, car $tr(A) = \sum_i \lambda_i > 0$*

Theorème 1.1. *Si M est à diagonale strictement dominante, alors elle est définie positive si et seulement si ses coefficients diagonaux sont des réels strictement positifs.*

Ce théorème est très important pour répondre rapidement à certaines questions dont les matrices sont à diagonales strictement dominantes.

2 Chapitre 2 / TD 4

2.1 Gauss

Theorème 2.1. *Un système $Ax = b$ admet une seule et unique solution si* $\det(A) \neq 0$

Proposition 2.1. *Soit A_{sup} une matrice triangulaire supérieure, les étapes de résolution du système $A_{sup}x = b$ sont les suivantes*

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \qquad \forall i,\ 1 \leq i \leq n-1,\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Proposition 2.2. *Soit A_{inf} une matrice triangulaire inférieure, les étapes de résolution du système $A_{inf}x = b$ sont les suivantes*

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} \qquad \forall i,\ 2 \leq i \leq n,\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Theorème 2.2. *Si toutes les sous-matrices principales A_k de la matrice A sont inversibles, alors, tous les pivots principaux $a_{k,k}^k$ sont non nuls.*

Theorème 2.3. *Si tous les pivots principaux sont non nuls, alors, toutes les sous-matrices A_k sont inversibles*

Proposition 2.3. *Le nombre total de multiplication/division, de même que celui d'addition/soustraction, dans l'algorithme de Gauss est de l'ordre de $O(n^3/3)$*

2.2 Factorisation LU

Theorème 2.4. *Non ce n'est toujours pas un gateau.*

La factorisation LU est le principe de trouver L triangulaire inférieure dont la diagonale ne contient que des 1 et U une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale quelconque telles que $A = LU$.

Par exemple, pour une matrice A de taille 3×3, on aura une décomposition comme suit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{bmatrix}$$

Une fois que l'on a une telle décomposition, on peut résoudre le système $Ax = b$ de la façon suivante

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Theorème 2.5. *La décomposition LU est unique si on impose une diagonale avec que des 1 sur la matrice L.*

Theorème 2.6. *A admet une décomposition LU si et seulement si toutes ses sous-matrices principales sont inversibles.*

Theorème 2.7. *Si A est symétrique définie positive, alors elle admet une décomposition LU.*

2.3 Cholesky

Proposition 2.4. *Une matrice symétrique définie positive est inversible. Cela veut dire que si* $\det(A) = 0$ *alors A n'est pas définie positive.*

Theorème 2.8. *Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe une seule matrice L triangulaire inférieure à valeurs diagonale positives telle que $A = LL^T$*

Pour montrer qu'une matrice est symétrique définie positive, il faut montrer qu'elle est symétrique, et qu'on a également

$$\forall x, x^T Ax \geq 0$$

et

$$x^T Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Pour ce faire, on fait le calcul $x^T Ax$ et on cherche à regrouper les termes pour faire apparaitre des identités similaires à $(x_i + x_j)^2$ ou $(x_i - x_j)^2$.

Je vous invite à regarder l'exemple de votre cours (slides 166 à 175) ou la correction de la question 5 à la fin de ce document.

Correction du CC2

Question 1

Toute matrice s'écrivant de la forme MM^T avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique. Or, la matrice proposé n'est pas symétrique, donc elle ne peut pas s'écrire sous la forme LL^T avec L triangulaire inferieure.

Question 2

Une matrice admet une décomposition LU si et seulement si toutes ses sous-matrices sont inversibles. C'est-à-dire, si toutes les matrices suivantes sont inversibles

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = A$$

Bien que A_1 soit inversible, ce n'est pas le cas de A_2 car sa seconde ligne est nulle.

Donc, A n'admet pas de factorisation LU.

Question 3

La matrice est symétrique, et après calcul, on a bien $LL^T = A$ donc cette affirmation est vraie.

Question 4

L'élimination de Gauss nécessite un nombre d'opération en $O(n^3/3)$. Ce résultat est à apprendre **par coeur**.

Question 5

Une matrice admet une décomposition de Cholesky si et seulement si elle est symétrique définie positive, i.e., $A \in S_n^{++}$.

Elle est symétrique, montrant qu'elle est définie positive.

A est définie positive si et seulement si elle respecte les équations suivantes

$$\forall x \neq 0, x^T A x > 0, \qquad x^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Calculons $x^T A x$

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = x_1(2x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 3x_2)$$

$$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + 3x_2^2 \geq 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$$

Ainsi, on a montré que A est symétrique définie positive donc qu'elle admet une décomposition de Cholesky.

Question 6

Seule la première matrice est définie positive (voir question précédente).

La matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ est à diagonale strictement dominante mais a un coefficient négatif sur la diagonale, elle n'est donc pas définie positive. (Voir Théorème (1.1)).

La matrice $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ a pour déterminant -36.

Or, le déterminant correspond au produit des valeurs propres, donc au moins une des valeurs propres est négative.

Ainsi, la matrice n'est pas définie positive.

Question 7

1. "En effectuant une multiplication matricielle LL^T et en comparant le résultat à A". Non, parce que la consigne dit **sans effectuer de multiplication matricielle.**

2. "En calculant le déterminant de A et en vérifiant s'il est égal au carré du produit des éléments diagonaux de L." Non, cela ne fonctionne pas si tous les éléments diagonaux ne sont pas positifs.

3. "En vérifiant que L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous positifs." Oui

Question 8

Comptons N_{MD} le nombre de muliplication/division pour la résolution du système $Ly = b$

Pour $i = 2$ à n on effectue les opérations suivantes

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} y_j \tag{7}$$

Pour calculer y_i, on a donc $i - 1$ multiplication dans l'équation (7)

En sommant sur toutes les valeurs de i, on obtient

$$N_{MD} = \sum_{i=2}^{n} (i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Question 9

Commençons par calculer le nombre du muliplication à l'étape des lignes 3 à 5 de l'algorithme. A la ligne 4, dans $\sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s} u_{s,j}$ il y a $k - 1$ multiplication.

Le nombre total d'opération entre les ligne 3 et 5 consiste à faire la somme sur le nombre de terme, soit

$$\sum_{j=k}^{n} (k-1) = (k-1) \left(\sum_{j=k}^{n} 1 \right) = (k-1) \times (n-k+1)$$

En effet, il y a $n - (k - 1) = n - k + 1$ termes entre k inclus et n.

Passons aux lignes 6 à 8. De nouveau, nous avons $k-1$ multiplication dans $\sum_{s=1}^{k-1} l_{i,s} u_{s,k}$, cependant, il faut ajouter une division à cela ce qui nous donne k multiplications/divisions à la ligne 7.

Encore une fois, nombre total d'opération entre les ligne 6 et 8 consiste à faire la somme sur le nombre de terme, soit

$$\sum_{i=k+1}^{n} k = k \times \left(\sum_{j=k+1}^{n} 1 \right) = k \times (n-k)$$

Ainsi, entre les lignes 3 et 8, nous avons $(k-1) \times (n-k+1) + k \times (n-k)$. Il suffit ensuite de faire la somme sur k donné par la ligne 1 de l'algorithme

$$
\begin{aligned}
N_{MD} &= \sum_{k=1}^{n} [(k-1)(n-k+1) + k(n-k)] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(2kn - 2k^2 + 2k - n - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2kn - \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 2n \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 2n \times \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n^2 - n \\
N_{MD} &= \frac{n^3 - n}{3}
\end{aligned}
$$

Question 10

On commence par faire la factorisation de A qui nous coûte $\frac{n^3-n}{3}$ multiplications/divisions d'après la question précédente.

Ensuite on fait m résolution avec une matrice L et m avec une matrice U.

Nous avons vu que résoudre un système avec L nous coûte $\frac{n^2-n}{2}$ d'après la question 8. Pour U cela nous donne $\frac{n^2+n}{2}$ car il faut rajouter les divisions par les éléments diagonaux. Ainsi, les m systèmes avec L nous coûte $m \times \frac{n^2-n}{2}$ opérations et $m \times \frac{n^2+n}{2}$ avec U.

Au total nous avons donc un nombre total de multiplications/divisions

$$N_{MD} = \frac{n^3 - n}{3} + m \times \frac{n^2 - n}{2} + m \times \frac{n^2 + n}{2}$$

$$N_{MD} = \frac{n^3}{3} + mn^2 - \frac{n}{3}$$