Méthodes Numériques **durée : 1h** **CC2 20/04/2023**

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟸ **Cocher** votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**.

NOM :

....

PRÉNOM :

....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Pour avoir les points d'une ♣ il faut cocher la ou toutes les bonnes réponses.
Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases (i.e., ☒)**.
Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement (i.e, ■)**.
Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses (dans limite de 25%).

Exercice 1

Question 1 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme LL^T.

☐ Faux. ☐ Vrai.

Question 2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU.

☐ Faux. ☐ Vrai.

Question 3 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une factorisation de Cholesky LL^T, où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ Vrai. ☐ Faux.

Question 4 Le principe d'élimination de Gauss appliqué à une matrice $n \times n$ nécessite un nombre d'opération de

☐ $O(n^3/3)$. ☐ $O(n^2)$. ☐ $O(n)$. ☐ $O(n^{3/2})$.

Question 5 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Choleski.

☐ Faux. ☐ Vrai.

Question 6 ♣ Parmi les matrices suivante la ou lesquelles est/sont définies positives ?

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Comment peut-on vérifier si la factorisation de Cholesky $A = LL^T$ est valide sans effectuer de multiplication matricielle ?

- ☐ En effectuant une multiplication matricielle LL^T et en comparant le résultat à A.
- ☐ Il n'y a pas de méthode pour vérifier la validité de Cholesky sans effectuer de multiplication matricielle.
- ☐ En calculant le déterminant de A et en vérifiant s'il est égal au carré du produit des éléments diagonaux de L.
- ☐ En vérifiant que L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous positifs.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 2

Question 8 Quel est le nombre total de multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution d'un système de la forme $L\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure, avec $L_{ii} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$?

- ☐ $n^2/2 + n/2$
- ☐ $n^2/2$
- ☐ $n^2 - n/2$
- ☐ $n^2 + n$
- ☐ $n^2 - 3n$
- ☐ $n^2/2 - n/2$
- ☐ n^2
- ☐ n^3
- ☐ $n^2 + 3n$

Question 9 Quel est le nombre de total multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution d'un système de la forme $U\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure ?

- ☐ n^3
- ☐ $n^2 + n$
- ☐ $n^2 - 3n$
- ☐ $n^2/2 + n/2$
- ☐ n^2
- ☐ $n^2 - n/2$
- ☐ $n^2/2$
- ☐ $n^2 + 3n$
- ☐ $n^2/2 - n/2$

Question 10 Quel est le nombre total de multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution de m systèmes de la forme $A\vec{x}^{(k)} = \vec{b}^{(k)}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $k = 1, \ldots, m$, en factorisant d'abord A puis en résolvant $L\vec{y}^{(k)} = \vec{b}^{(k)}$ et $U\vec{x}^{(k)} = \vec{y}^{(k)}$?

- ☐ $n^3/3 + (m - 1/2)n^2 - (m - 1/6)n$
- ☐ $n^3 - mn^2 + 3mn$
- ☐ $n^3/6 + mn/2$
- ☐ $n^3 + 3mn + 3m$
- ☐ $mn^3/6 + mn$
- ☐ $n^3/3 + mn^2 - mn/3$
- ☐ $n^3 - mn/2$
- ☐ $n^3/3 + mn^2 - n/3$
- ☐ $n^3/3 - (m + 1)n^2 - n/3$