Correction

Méthodes Numériques **durée : 1h** **CC2 17/04/2024**

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

$\Longleftarrow$ **Cocher** votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**.

NOM :

....

PRÉNOM :

....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions ont une unique bonne réponse.
Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases (i.e., ☒)**.
Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement (i.e, ■)**.
Des points négatifs seront affectés à de *mauvaises* réponses (2pt bonne, -0.5pt mauvaise).

Question 1 Soient a, b et c des réels strictement positifs et soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{pmatrix}.$$

Si $A_1 = L_1 U_1$ et $A_2 = L_2 D L_2^T$, alors $U_1 = L_2^T$.

☐ On ne peut pas conclure. ☐ Faux. ■ Vrai.

Question 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $A^T A$ admet une décomposition de Cholesky.

☐ On ne peut pas conclure. ☐ Faux. ■ Vrai.

Question 3 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU (sans permutation).

☐ On ne peut pas conclure. ☐ Vrai. ■ Faux.

Question 4 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ est définie positive.

■ Faux. ☐ Vrai. ☐ On ne peut pas conclure.

Question 5 Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

☐ Vrai. ■ Faux. ☐ Pas nécessairement.

Correction

Question 6 Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A+B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

□ Pas nécessairement. ■ Vrai. □ Faux.

Question 7 Sélectionnez les instructions de remplacement appropriées pour les blancs marqués $\odot$, $\circledast$ $\otimes$.

Algorithme 1 : Factorisation de Cholesky pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

```
L_{1,1} ← √A_{1,1} ; for j ← 2 to n do
    L_{j,1} ← A_{j,1} / L_{1,1} ;
end
for i ← 2 to n − 1 do
    k ← 1 : (i − 1) ; ⊙ ; for j ← i + 1 to n do
        k ← 1 : (i − 1) ; ⊛ ;
    end
end
k ← 1 : (n − 1) ; ⊗ ; return L ;
```

■ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} - \sum_{r\in k} L_{n,r}^2}$; $\circledast : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} - \sum_{r\in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$; $\odot : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} - \sum_{r\in k} L_{i,r}^2}$

□ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} - \sum_{r\in k} L_{n,r}^2}$; $\circledast : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} - \sum_{r\in k} L_{i,r}^2}$; $\odot : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} - \sum_{r\in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$

□ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} + \sum_{r\in k} L_{n,r}^2}$; $\circledast : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} + \sum_{r\in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$; $\odot : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} + \sum_{r\in k} L_{i,r}^2}$

□ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} + \sum_{r\in k} L_{n,r}^2}$; $\circledast : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} + \sum_{r\in k} L_{i,r}^2}$; $\odot : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} + \sum_{r\in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$

Question 8 Soit $A \in \mathcal{S}_6^{++}(\mathbb{R})$ (une matrice pleine). Quel est le nombre total de soustractions/additions dans l'algorithme de factorisation de Cholesky de A (un chiffre par ligne, i.e., centaines, dizaines, unités) ?

■0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 ■3 □4 □5 □6 □7 □8 □9
□0 □1 □2 □3 □4 ■5 □6 □7 □8 □9

Question 9 Soit le système linéaire suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

En partant de $\vec{x}^{(0)} = (0,0,4)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération $\vec{x}^{(1)}$ de la méthode de Jacobi ?

■ $(1,3,1)^T$ □ $(1,1,1)^T$ □ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$ □ $(1,-1,1)^T$ □ $(2,2,2)^T$ □ $(1,2,1)^T$

Question 10 Soit le système linéaire suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

En partant de $\vec{x}^{(0)} = (1,1,1)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération de la méthode de Gauss-Seidel ?

□ $(1,2,2)^T$ □ $(\frac{4}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4})^T$ □ $(2,3,3)^T$ □ $(2,2,2)^T$ ■ $(1,2,1)^T$ □ $(1,1,1)^T$