



<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6
<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8
<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9

← Cocher votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**.

NOM :

.....

PRÉNOM :

.....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.

Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases** (i.e., ☑).

Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement** (i.e., ■).

Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses.

#### EXERCICE 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

**Question 1** La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est symétrique définie positive.

☐ Vrai.

☐ Faux.

**Question 2** La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  s'écrit sous la forme  $LL^T$ .

☐ Vrai.

☐ Faux.

**Question 3** La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  admet une factorisation de Cholesky  $LL^T$ , où  $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

☐ Vrai.

☐ Faux.

**Question 4** La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  admet une décomposition de Choleski.

☐ Faux.

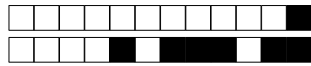
☐ Vrai.

**Question 5** La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  admet une décomposition  $LU$ .

☐ Vrai.

☐ Faux.

#### EXERCICE 2



Soient  $a, b$  et  $c$  des réels. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

**Question 6 ♣** Parmi les propositions suivantes, quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) a-t-on sur  $a, b$  et  $c$  pour que la matrice  $A$  soit inversible ?

- ☐  $a = 1.$
- ☐  $a < b.$
- ☐  $b \neq a.$
- ☐  $b > a.$

- ☐  $c > b.$
- ☐  $b < c.$
- ☐  $c = d.$
- ☐  $a \neq 0.$

- ☐  $a = 0.$
- ☐  $b = c.$
- ☐  $b \neq c.$
- ☐  $a > 0.$

**Question 7** Si on applique l'algorithme d'élimination de Gauss à  $A$  pour obtenir une décomposition  $A = LU$ , la matrice  $L$  obtenue correspond à :

☐  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$

☐  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-b & 1 & 0 \\ a-b & b-c & 1 \end{pmatrix}.$

☐  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

☐  $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$

☐  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

☐  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

**Question 8 ♣** On suppose que les conditions sur  $a, b$  et  $c$  sont satisfaites pour que  $A$  admette une unique décomposition  $LU$  où  $L$  est triangulaire inférieure à diagonale unité et  $U$  est triangulaire supérieure. Dans ces conditions, la matrice  $A$  admet-elle une décomposition  $A = LDL^T$  où  $L$  est triangulaire inférieure à diagonale unité et  $D$  est une matrice diagonale inversible ? Si cette assertion est vraie, identifier les matrice  $L$  et  $D$  et donner les condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur  $a, b$  et  $c$  pour que la matrice  $A$  soit définie positive.

- ☐  $b \neq a.$
- ☐  $a \neq 0.$
- ☐  $b > a.$
- ☐ L'assertion est fausse.
- ☐  $c = d.$

- ☐  $c > b.$
- ☐  $b \neq c.$
- ☐  $b < c.$
- ☐  $|a| > 1.$

- ☐  $b = c.$
- ☐  $a < b.$
- ☐  $a = 0.$
- ☐  $a = 1.$
- ☐  $a > 0.$

**Question 9 ♣** La matrice  $A$  peut-elle admettre une unique décomposition de Cholesky de la forme  $A = LL^T$  où  $L$  est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs ? Si oui, et si elles sont toutes proposées, donner les conditions nécessaires et suffisantes sur  $a, b$  et  $c$  pour garantir l'existence et l'unicité de la décomposition.

- ☐ Non.
- ☐  $a > 0.$
- ☐  $c > b.$
- ☐ Il manque des conditions.
- ☐  $b < c.$

- ☐  $|a| > 1.$
- ☐  $a < b.$
- ☐  $b = c.$
- ☐  $a = 1.$
- ☐  $b > a.$

- ☐  $a = 0.$
- ☐  $b \neq a.$
- ☐  $a \neq 0.$
- ☐  $b \neq c.$
- ☐  $c = d.$

### EXERCICE 3

**Question 10** Quel est le nombre total d'opérations élémentaires (multiplications/divisions et additions/soustractions) nécessaire lors de la résolution d'un système de la forme  $L\vec{x} = \vec{b}$ , où  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  et  $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire inférieure, avec  $L_{ii} = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  ?

- ☐  $n^3$
- ☐  $n^2 + n.$
- ☐  $n^2 - n.$

- ☐  $n^2 + n/2.$
- ☐  $n^2 + 3n + 3$
- ☐  $n.$

- ☐  $n^2.$
- ☐  $n^2 - 3n + 3$
- ☐  $n^2 - n/2$