Correction

Méthodes Numériques **durée : 1h** **CC2 du 04/04/2022**

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

$\Longleftarrow$ Cocher votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**.

NOM :

....

PRÉNOM :

....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.
Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases (i.e., ☒)**.
Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement (i.e, ■)**.
Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses.

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Question 1 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive.

☐ Vrai. ■ Faux.

Question 2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme LL^T.

☐ Vrai. ■ Faux.

Question 3 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une factorisation de Cholesky LL^T, où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

☐ Vrai. ■ Faux.

Question 4 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Choleski.

☐ Faux. ■ Vrai.

Correction

Question 5 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU.

■ Vrai.

□ Faux.

Exercice 2

Soient a, b et c des réels. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Question 6 ♣ Parmi les propositions suivantes, quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) a-t-on sur a, b et c pour que la matrice A soit inversible ?

□ $a = 1$.
□ $a < b$.
■ $b \neq a$.
□ $b > a$.
□ $c > b$.
□ $b < c$.
□ $c = d$.
■ $a \neq 0$.
□ $a = 0$.
□ $b = c$.
■ $b \neq c$.
□ $a > 0$.

Question 7 Si on applique l'algorithme d'élimination de Gauss à A pour obtenir une décomposition $A = LU$, la matrice L obtenue correspond à :

□ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$.

□ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-b & 1 & 0 \\ a-b & b-c & 1 \end{pmatrix}$.

□ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

□ $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

□ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

■ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 8 ♣ On suppose que les conditions sur a, b et c sont satisfaites pour que A admette une unique décomposition LU où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U est triangulaire supérieure. Dans ces conditions, la matrice A admet-elle une décomposition $A = LDL^T$ où L est triangulaire inférieure à diagonale unité et D est une matrice diagonale inversible ? Si cette assertion est vraie, identifier les matrice L et D et donner les condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur a, b et c pour que la matrice A soit définie positive.

□ $b \neq a$.
□ $a \neq 0$.
■ $b > a$.
□ L'assertion est fausse.
□ $c = d$.
■ $c > b$.
□ $b \neq c$.
□ $b < c$.
□ $|a| > 1$.
□ $b = c$.
□ $a < b$.
□ $a = 0$.
□ $a = 1$.
■ $a > 0$.

Question 9 ♣ La matrice A peut-elle admettre une unique décomposition de Cholesky de la forme $A = LL^T$ où L est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs ? Si oui, et si elles sont toutes proposées, donner les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b et c pour garantir l'existence et l'unicité de la décomposition.

□ Non.
■ $a > 0$.
■ $c > b$.
□ Il manque des conditions.
□ $b < c$.
□ $|a| > 1$.
□ $a < b$.
□ $b = c$.
□ $a = 1$.
■ $b > a$.
□ $a = 0$.
□ $b \neq a$.
□ $a \neq 0$.
□ $b \neq c$.
□ $c = d$.

Exercice 3

Question 10 Quel est le nombre total d'opérations élémentaires (multiplications/divisions et additions/soustractions) nécessaire lors de la résolution d'un système de la forme $L\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure, avec $L_{ii} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$?

- [ ] n^3
- [ ] $n^2 + n$.
- [x] $n^2 - n$.
- [ ] $n^2 + n/2$.
- [ ] $n^2 + 3n + 3$
- [ ] n.
- [ ] n^2.
- [ ] $n^2 - 3n + 3$
- [ ] $n^2 - n/2$

Correction