

CORRECTION

Méthodes Numériques

durée : 1h

CC2 20/04/2023

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← **Cocher** votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**.

NOM :

.....

PRÉNOM :

.....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Pour avoir les points d'une ♣ il faut cocher la ou toutes les bonnes réponses.

Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases (i.e., ☒)**.

Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement (i.e., ■)**.

Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses (dans limite de 25%).

EXERCICE 1

Question 1 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme LL^T .

■ Faux.

☐ Vrai.

Question 2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU .

■ Faux.

☐ Vrai.

Question 3 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une factorisation de Cholesky LL^T , où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

■ Vrai.

☐ Faux.

Question 4 Le principe d'élimination de Gauss appliqué à une matrice $n \times n$ nécessite un nombre d'opération de

■ $O(n^3/3)$.☐ $O(n^2)$.☐ $O(n)$.☐ $O(n^{3/2})$.

Question 5 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Choleski.

☐ Faux.

■ Vrai.

CORRECTION

Question 6 ♣ Parmi les matrices suivante la ou lesquelles est/sont définies positives ?

☒ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 7 ♣ Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Comment peut-on vérifier si la factorisation de Cholesky $A = LL^T$ est valide sans effectuer de multiplication matricielle ?

☐ En effectuant une multiplication matricielle LL^T et en comparant le résultat à A .

☐ Il n'y a pas de méthode pour vérifier la validité de Cholesky sans effectuer de multiplication matricielle.

☐ En calculant le déterminant de A et en vérifiant s'il est égal au carré du produit des éléments diagonaux de L .

☒ En vérifiant que L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous positifs.

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

EXERCICE 2

Question 8 Quel est le nombre total de multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution d'un système de la forme $L\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure, avec $L_{ii} = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$?

☐ $n^2/2 + n/2$

☐ $n^2/2$

☐ $n^2 - n/2$

☐ $n^2 + n$

☐ $n^2 - 3n$

☒ $n^2/2 - n/2$

☐ n^2

☐ n^3

☐ $n^2 + 3n$

Question 9 Quel est le nombre de total multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution d'un système de la forme $U\vec{x} = \vec{b}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure ?

☐ n^3

☐ $n^2 + n$

☐ $n^2 - 3n$

☒ $n^2/2 + n/2$

☐ n^2

☐ $n^2 - n/2$

☐ $n^2/2$

☐ $n^2 + 3n$

☐ $n^2/2 - n/2$

Question 10 Quel est le nombre total de multiplications/divisions nécessaire lors de la résolution de m systèmes de la forme $A\vec{x}^{(k)} = \vec{b}^{(k)}$, où $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et $k = 1, \dots, m$, en factorisant d'abord A puis en résolvant $L\vec{y}^{(k)} = \vec{b}^{(k)}$ et $U\vec{x}^{(k)} = \vec{y}^{(k)}$?

☐ $n^3/3 + (m-1/2)n^2 - (m-1/6)n$

☐ $n^3 - mn^2 + 3mn$

☐ $n^3/6 + mn/2$

☐ $n^3 + 3mn + 3m$

☐ $mn^3/6 + mn$

☐ $n^3/3 + mn^2 - mn/3$

☐ $n^3 - mn/2$

☒ $n^3/3 + mn^2 - n/3$

☐ $n^3/3 - (m+1)n^2 - n/3$