# Corrigé partiel MN 2022

Aymeric Jan (teaching@aymericjan.fr)

May 7, 2023

## Résultats importants

**Proposition 0.1** (Rayon spectral et produit de matrices). *Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $AB$ est semblable à $BA$. De plus, on a*

$$\rho(AB) = \rho(BA)$$

*Proof.* Montrons d'abord que $AB$ est semblabe à $BA$

$$AB = AB(AA^{-1}) = A(BA)A^{-1}$$

De plus, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc même rayon spectral. □

**Proposition 0.2** (Commutants d'une matrice). *Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $M$ commute avec $(I_n + M)^{-1}$.*

*Proof.*

$$(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = (I_n + M)^{-1} + M(I_n + M)^{-1}$$

Or, comme $(I_n + M)^{-1}$ commute avec $(I_n + M)$, on a aussi

$$(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = (I_n + M)^{-1}(I_n + M) = (I_n + M)^{-1} + (I_n + M)^{-1}M$$

Ainsi, on peut écrire

$$(I_n + M)^{-1} + (I_n + M)^{-1}M = (I_n + M)^{-1} + M(I_n + M)^{-1}$$

Enfin, en simplifiant à gauche et à droite par $(I_n + M)^{-1}$, on obtient

$$(I_n + M)^{-1}M = M(I_n + M)^{-1}$$

□

**Proposition 0.3** (Majoration du rayon spectral). *Pour toute norme induite $||.||_{\mathcal{M}_n}$, et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

$$\rho(A) \leq ||A||_{\mathcal{M}_n}$$

*Proof.* Soit $\lambda_{max}$ la plus grande des valeurs propres de $A$, et $v$ un vecteur propre associé

$$||Av|| = ||\lambda_{max} v|| = |\lambda_{max}| \times ||v|| \tag{1}$$

Or, par propriété des normes induites

$$||Av|| \leq ||A||_{\mathcal{M}_n} \times ||v|| \tag{2}$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient

$$|\lambda_{max}| \times ||v|| \leq ||A||_{\mathcal{M}_n} \times ||v|| \Leftrightarrow |\lambda_{max}| \leq ||A||_{\mathcal{M}_n}$$

Ce qui donne

$$\rho(A) \leq ||A||_{\mathcal{M}_n}$$

□

**Proposition 0.4** (Rayon spectral matrice symétrique)**.** *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est symétrique, alors*

$$||A||_2 = \rho(A)$$

# Exercice 1

## Question 1

Le système s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}$$

## Question 2

Le nombre de solutions à un sytème de la forme $Ax = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ dépend uniquement de $A$ et non de $b$.

Un tel système admet une seule et unique solution si $A$ est inversible.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 24 \neq 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } det(A) \neq 0 \text{ donc } A \text{ est inversible et le système admet une seule et unique solution.}}$$

## Question 3a

La matrice $A$ admet une factorisation LU si et seulement si toutes les sous-matrices principales de $A$ sont inversibles.

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad A_3 = A$$

$A_1$ est inversible car il s'agit d'un réel non nul. De plus, nous avons déjà montré que $A$ était inversible donc $A_3$ l'est aussi.

Calculons le déterminant de $A_2$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 \neq 0$$

Toutes les sous matrices principales de $A$ sont inversibles, ainsi, $A$ admet une factorisation LU.

De plus, en ajoutant la contrainte suivante: $\forall i, L_{i,i} = 1$, la factorisation LU est unique.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet donc une unique factorisation LU.}}$$

## Question 3b

Nous pouvons expliciter la factorisation comme suit

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué le produit matriciel, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ L_{2,1}U_{1,1} & L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} & L_{2,1}U_{1,3} + U_{2,3} \\ L_{3,1}U_{1,1} & L_{3,1}U_{1,2} + L_{3,2}U_{2,2} & L_{3,1}U_{1,3} + L_{3,2}U_{2,3} + U_{3,3} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Il suffit ensuite d'identifier les différents termes des deux matrices avec la liste suivantes d'équations provenant de (3)

$$\begin{cases} U_{1,1} = 1, \quad U_{1,2} = 2, \quad U_{1,3} = -3 \\ L_{2,1}U_{1,1} = 2 \Rightarrow L_{2,1} = \frac{2}{U_{1,1}} = 2 \\ L_{3,1}U_{1,1} = 1 \Rightarrow L_{3,1} = 1 \\ L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} = 6 \Rightarrow U_{2,2} = 6 - L_{2,1}U_{1,2} = 2 \\ L_{2,1}U_{1,3} + U_{2,3} = -5 \Rightarrow U_{2,3} = 1 \\ L_{3,1}U_{1,2} + L_{3,2}U_{2,2} = -2 \Rightarrow L_{3,2} = \frac{-2 - L_{3,1}U_{1,2}}{U_{2,2}} = -2 \\ L_{3,1}U_{1,3} + L_{3,2}U_{2,3} + U_{3,3} = 7 \Rightarrow U_{3,3} = 7 - L_{3,1}U_{1,3} - L_{3,2}U_{2,3} = 12 \end{cases}$$

Pour résumer, la factorisation obtenue est la suivante:

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}}$$

Passons à la résolution du système $Ax = b$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Commençons par résoudre le premier système $Ly = b$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{(L|b)} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2\times L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2\times L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Ce qui nous donne

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Résolvons maintenant le second système $Ux = y$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{array}\right)}_{(U|y)} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3/12} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -31/12 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -31/24 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3\times L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -31/24 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 28/12 \\ 0 & 1 & 0 & -31/24 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 \end{array}\right)$$

On a résolu le système en entier et obtenu la valeur de $x$

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} 28/12 \\ -31/24 \\ -5/12 \end{bmatrix}}$$

## Question 3c

On note $N_{MD}$ le nombre de muliplications/divisions et $N_{AS}$ le nombre d'additions/soustractions

Comptons le nombre d'opérations pour la résolution du système $Ly = b$

Pour $i = 2$ à $n$ on effectue les opérations suivantes

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} y_j$$

Pour $y_i$ on a donc $N_{MD}^{(1)}(y_i) = i - 1$ et $N_{AS}^{(1)}(y_i) = i$

En sommant sur toutes les valeurs de $i$, on obtient

$$N_{MD}^{(1)} = \sum_{i=2}^{n} (i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \tag{4}$$

$$N_{AS}^{(1)} = \sum_{i=2}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5}$$

Comptons à présent le nombre d'opérations pour la résolution du système $Ux = y$

Pour $i = 1$ à $n-1$ on effectue les opérations suivantes

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j} y_j}{U_{i,i}}$$

Pour $x_i$ on a donc $N_{MD}^{(2)}(x_i) = 1 + (n-1)$ et $N_{AS}^{(2)}(x_i) = 1 + (n-1)$

En sommant sur toutes les valeurs de $i$ on obtient donc

$$N_{MD}^{(2)} = N_{AS}^{(2)} = \sum_{i=2}^{n} 1 + (n-i) = (n-1) + n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \tag{6}$$

Au total, en combinant les résultats des équations (4), (5) et (6), on obtient

$$N_{MD} = N_{MD}^{(1)} + N_{MD}^{(2)} = (n+1)(n-1)$$

$$N_{AD} = N_{AD}^{(1)} + N_{AD}^{(2)} = n + (n+1)(n-1)$$

$\boxed{\text{Le nombre d'opérations pour résoudre un système avec la factorisation LU est ainsi en } O(n^2)}$.

# Exercice 3

## Question 1

La suite $x^{(k)}$ est définie par les deux équations suivantes

$$\begin{cases} (D+H)x^{(k+\frac{1}{2})} = -Vx^{(k)} + b \\ (D+V)x^{(k+1)} = -Hx^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{cases}$$

De la première équation, on extrait la valeur de $x^{(k+\frac{1}{2})}$, et de la seconde, la valeur de $x^{(k+1)}$

$$\begin{cases} x^{(k+\frac{1}{2})} = -(D+H)^{-1}Vx^{(k)} + (D+H)^{-1}b \\ x^{(k+1)} = -(D+V)^{-1}Hx^{(k+\frac{1}{2})} + (D+V)^{-1}b \end{cases} \tag{7}$$

En combinant les deux équations de (7), on obtient

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= -(D+V)^{-1}H\left(-(D+H)^{-1}Vx^{(k)} + (D+H)^{-1}b\right) + (D+V)^{-1}b \\
&= (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}Vx^{(k)} - (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}b + (D+V)^{-1}b \\
&= (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}Vx^{(k)} + (D+V)^{-1}\left(I_n - H(D+H)^{-1}\right)b
\end{aligned}
$$

Ainsi, la suite est de la forme $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$, avec

$$
\begin{cases} T = (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V \\ c = (D+V)^{-1}\left(I_n - H(D+H)^{-1}\right)b \end{cases} \tag{8}
$$

Une telle suite converge si et seulement si $\rho(T) < 1$, soit

$$
\boxed{\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) < 1} \tag{9}
$$

## Question 2a

Posons $B = D^{-1}H$ et $C = D^{-1}V$, ce qui nous donne également

$$
H = DB \qquad V = DC \tag{10}
$$

Réécrivons la matrice $T$ obtenue à l'équation (8) grâce à (10)

$$
\begin{aligned}
(D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V &= (D+DC)^{-1}DB(D+DB)^{-1}DC \\
&= [D(I_n+C)]^{-1}DB\,[D(I_n+B)]^{-1}DC \\
&= (I_n+C)^{-1}D^{-1}DB(I_n+B)^{-1}D^{-1}DC \\
&= (I_n+C)^{-1}B(I_n+B)^{-1}C
\end{aligned} \tag{11}
$$

De la dernière égalité dans l'équation (11), on peut déduire

$$
\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) = \rho\left((I_n+C)^{-1}B(I_n+B)^{-1}C\right) \tag{12}
$$

Dans notre cas, $(I_n+C)^{-1}$ est inversible, on peut donc utiliser la proposition 0.1 pour écrire

$$
\rho\left((I_n+C)^{-1}B(I_n+B)^{-1}C\right) = \rho\left(B(I_n+B)^{-1}C(I_n+C)^{-1}\right) \tag{13}
$$

Ainsi, les résulats des équations (12) et (13) nous donnent

$$
\boxed{\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) = \rho\left(B(I_n+B)^{-1}C(I_n+C)^{-1}\right)} \tag{14}
$$

### Question 2b

Par hypothèse, $H$ et $V$ sont symétriques. Par ailleurs, $B = D^{-1}H = c^{-1}H$ avec $c \in \mathbb{R}^*$ donc $B$ est symétrique, de même pour $C$.

De plus, $B$ étant symétrique, $(I_n + B)$ l'est aussi, et $(I_n + B)^{-1}$ aussi à fortiori.

Montrons que $B(I_n + B)^{-1}$ est symétrique

$$(B(I_n + B)^{-1})^T = ((I_n + B)^{-1})^T B^T = (I_n + B)^{-1}B$$

De plus, d'après la proposition 0.2, $B$ commute avec $(I_n + B)^{-1}$

Cela nous donne

$$(B(I_n + B)^{-1})^T = B(I_n + B)^{-1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } B(I_n + B)^{-1} \text{ est symétrique, de même pour } C(I_n + C)^{-1}.}$$

D'après l'équation (14) de la question précédente, on a

$$\rho\left((D + V)^{-1}H(D + H)^{-1}V\right) = \rho\left(B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}\right)$$

En utilisant la proposition 0.3, on peut écrire

$$\rho\left(B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}\right) \leq ||B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}||_2$$

Par propriété des normes induites on a

$$||B(I_n + B)^{-1}C(I_n + C)^{-1}||_2 \leq ||B(I_n + B)^{-1}||_2 \times ||C(I_n + C)^{-1}||_2 \tag{15}$$

De plus, $B(I_n + B)^{-1}$ et $C(I_n + C)^{-1}$ étant symétriques, on peut utiliser la propriété 0.4

$$||B(I_n + B)^{-1}||_2 = \rho\left(B(I_n + B)^{-1}\right) \qquad ||C(I_n + C)^{-1}||_2 = \rho\left(C(I_n + C)^{-1}\right) \tag{16}$$

Ainsi, d'après les équations (15) et (16), on obtient

$$\boxed{\rho\left((D + V)^{-1}H(D + H)^{-1}V\right) \leq \rho\left(B(I_n + B)^{-1}\right)\rho\left(C(I_n + C)^{-1}\right)} \tag{17}$$

### Question 2c

Soit $v$ un vecteur propre de $B$ associé à la valeur propre $\lambda$. On a par définition

$$Bv = \lambda v \tag{18}$$

On a également

$$(I_n + B)v = (1 + \lambda)v \Leftrightarrow v = (1 + \lambda)(I_n + B)^{-1}v \Leftrightarrow Bv = (1 + \lambda)B(I_n + B)^{-1}v \tag{19}$$

En combinant les équations (18) et (19), on obtient

$$\lambda v = (1+\lambda)B(I_n+B)^{-1}v \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+\lambda}v = B(I_n+B)^{-1}v$$

Ainsi, $\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)}$ est une valeur propre de $B(I_n+B)^{-1}$ associée au vecteur propre $v$.

Or, par hypothèse, $\rho\left(B(I_n+B)^{-1}\right) < 1$ donc $\left|\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right| < 1$.

Dans les cas où $\lambda > 0$ et $\lambda < -1$, on obtient la condition $\lambda < \lambda + 1$ qui n'apporte rien.

Le cas intéressant est celui où $\lambda \in ]-1, 0]$, qui nous donne

$$\frac{-\lambda}{1+\lambda} < 1 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} > 0 \tag{20}$$

L'inégalité (20) est équivalente à l'affirmation: $\dfrac{1}{2}I_n + B$ définie positive.

Ce qui nous donne

$$\boxed{\rho\left(B(I_n+B)^{-1}\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}I_n + B \text{ est définie positive.}} \tag{21}$$

Ainsi, si $\dfrac{1}{2}I_n + B$ et $\dfrac{1}{2}I_n + C$ sont définies positives, grâce à (21), on a alors

$$\rho\left(B(I_n+B)^{-1}\right)\rho\left(C(I_n+C)^{-1}\right) < 1$$

et donc convergence de la méthode itérative d'après (9) et (17).

Par ailleurs, $\dfrac{1}{2}I_n + B$ est définie positive si et seulement si $D\left(\frac{1}{2}I_n + B\right)$ l'est aussi, car $D = cI_n$ avec $c > 0$.

En développant, on obtient

$$D\left(\frac{1}{2}I_n + B\right) = \frac{1}{2}D + DB = \frac{1}{2}D + H \tag{22}$$

On en déduit donc

$$\frac{1}{2}I_n + B \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \frac{1}{2}D + H \text{ est définie positive}$$

$$\boxed{\text{Au final, la méthode itérative converge dès que les matrices } \frac{1}{2}D + H \text{ et } \frac{1}{2}D + V \text{ sont définies positives.}}$$