Méthodes Numériques

L2 MIASHS

Fabien Navarro

E-mail: fabien.navarro@univ-paris1.fr

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

CC2

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

1. $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

1. $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
2. $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

1. $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
2. $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (A définie).

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

1. $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
2. $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (A définie).
4. $\vec{x}^T A\vec{x} > 0, \forall\, \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (définie positive).

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

1. $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
2. $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \geq 0, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (A définie).
4. $\vec{x}^T A\vec{x} > 0, \forall\, \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (définie positive).

Notation : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 4

Une matrice A est symétrique définie postive si et seulement si :

Toutes les sous-matrices A_k de A $(k = 1, \ldots, n)$ sont aussi symétriques définies positives.

Théorème 5

Une matrice symétrique A est définie postive si et seulement si :

Toutes les sous-matrices A_k de A $(k = 1, \ldots, n)$ ont un déterminant positif.

REMARQUES

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \text{ existe } (A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

REMARQUES

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \text{ existe } (A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow a_{ii} > 0 \; (e_i^T A e_i = a_{ii} > 0)$$

REMARQUES

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \text{ existe } (A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow a_{ii} > 0 \ (e_i^T A e_i = a_{ii} > 0)$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow (a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}, \forall i \neq j$$

REMARQUES

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \text{ existe } (A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow a_{ii} > 0 \; (e_i^T A e_i = a_{ii} > 0)$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow (a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}, \forall i \neq j$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$$

REMARQUES

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \text{ existe } (A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow a_{ii} > 0 \; (e_i^T A e_i = a_{ii} > 0)$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow (a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}, \forall i \neq j$$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$$

...

REMARQUES

L'inégalité de Cauchy-Schwarz stipule que pour tout vecteur u et v,

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

avec égalité si et seulement si u and v sont linéairement dépendants.

REMARQUES

L'inégalité de Cauchy-Schwarz stipule que pour tout vecteur u et v,

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

avec égalité si et seulement si u and v sont linéairement dépendants.
En appliquant aux colonnes de A

$$((Ae_i) \cdot (Ae_j))^2 \leq \|Ae_i\|^2 \|Ae_j\|^2$$

REMARQUES

L'inégalité de Cauchy-Schwarz stipule que pour tout vecteur u et v,

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

avec égalité si et seulement si u and v sont linéairement dépendants.
En appliquant aux colonnes de A

$$((Ae_i) \cdot (Ae_j))^2 \leq \|Ae_i\|^2 \|Ae_j\|^2$$

Par suite

$$(a_{ij})^2 < (Ae_i)^T (Ae_i)(Ae_j)^T (Ae_j) = a_{ii} a_{jj}$$

L'inégalité est stricte à moins que $i = j$ ou Ae_i et Ae_j soient linéairement dépendants, ce qui impliquerait que e_i et e_j soient linéairement dépendants (ce qui n'est pas possible pour les vecteurs de base standard avec $i \neq j$.

CC2

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ est définie positive.

CC2

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Non $a_{33} < 0$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Faux: $\forall\, x \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $x^T Ax > 0$, $x^T(-A)x = -x^T Ax < 0$ ($-A$ est définie négative).

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Faux: $\forall\, x \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $x^T A x > 0$, $x^T(-A)x = -x^T A x < 0$ ($-A$ est définie négative).

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Faux: $\forall\, x \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $x^T A x > 0$, $x^T(-A)x = -x^T A x < 0$ ($-A$ est définie négative).

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Vrai: $A = A^T$, $x^T A^T x > 0$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Faux: $\forall\, x \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $x^T A x > 0$, $x^T(-A)x = -x^T A x < 0$ ($-A$ est définie négative).

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Vrai: $A = A^T$, $x^T A^T x > 0$

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A + B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Faux: $\forall\, x \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, $x^T Ax > 0$, $x^T(-A)x = -x^T Ax < 0$ ($-A$ est définie négative).

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Vrai: $A = A^T$, $x^T A^T x > 0$

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A+B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Vrai: $x^T(A+B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0$, e.g,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} > 0$$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A - B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A - B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Pas nécessairement: $x^T(A-B)x = x^TAx - x^TBx \lesseqgtr 0$, e.g,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A - B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Pas nécessairement: $x^T(A - B)x = x^T Ax - x^T Bx \lesseqgtr 0$, e.g,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A^2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

CC2

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A - B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Pas nécessairement: $x^T(A-B)x = x^T Ax - x^T Bx \lesseqgtr 0$, e.g,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A^2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Vrai: Si A est symétrique, alors $A^T = A$. Par conséquent,

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T = AA = A^2,$$

Donc,

$$x^T A^2 x = x^T AAx = (Ax)^T (Ax) =< Ax, Ax >= ||Ax||^2 > 0, \forall\, x \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n.$$

DÉFINITION

Une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est dite à diagonale strictement dominante si pour tout $i = 1$ à n, on a

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|.$$

CC2

Parmi les matrices suivante lesquelles sont à diagonale strictement dominante ?

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

CC2

Parmi les matrices suivante lesquelles sont à diagonale strictement dominante ?

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

C :

$$\begin{aligned} |-6| &> |0| + |3| \\ |8| &> |5| + |-2| \\ |3| &> |1| + |-1| \end{aligned}$$

CC2

Théorème 2

Une matrice A admet une factorisation LU ssi : toutes les sous matrices principales A_k de la matrice A sont inversible,

CC2

Théorème 2

Une matrice A admet une factorisation LU ssi : toutes les sous matrices principales A_k de la matrice A sont inversible,

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU (sans permutation).

CC2

Théorème 2

Une matrice A admet une factorisation LU ssi : toutes les sous matrices principales A_k de la matrice A sont inversible,

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU (sans permutation).

Faux :

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

CC2

Théorème de Cholesky

Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe une seule matrice L triangulaire inférieure à valeurs diagonales positives (mais pas nécessairement $= 1$) telle que

$$A = LL^T.$$

CC2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice AA^T admet une décomposition de Cholesky.

CC2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice AA^T admet une décomposition de Cholesky.

Faux:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

CC2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice AA^T admet une décomposition de Cholesky.

Faux:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(AA^T) = 0 \Longrightarrow A \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$ et A n'admet pas de décomposition de Cholesky.

CC2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice AA^T admet une décomposition de Cholesky.

Faux:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(AA^T) = 0 \Longrightarrow A \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$ et A n'admet pas de décomposition de Cholesky.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $A^T A$ admet une décomposition de Cholesky.

CC2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice AA^T admet une décomposition de Cholesky.

Faux:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(AA^T) = 0 \Longrightarrow A \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$ et A n'admet pas de décomposition de Cholesky.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $A^T A$ admet une décomposition de Cholesky.

Vrai :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

CC2

Soient a, b et c des réels strictement positifs et soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{pmatrix}.$$

Si $A_1 = L_1 U_1$ et $A_2 = L_2 D L_2^T$, alors $L_1 = L_2$.

CC2

Soient a, b et c des réels strictement positifs et soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{pmatrix}.$$

Si $A_1 = L_1 U_1$ et $A_2 = L_2 D L_2^T$, alors $L_1 = L_2$.

Vrai : $A_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \det((A_1)_k) > 0, \exists !, A_1 = L_1 U_1$

CC2

Soient a, b et c des réels strictement positifs et soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{pmatrix}.$$

Si $A_1 = L_1 U_1$ et $A_2 = L_2 D L_2^T$, alors $L_1 = L_2$.

Vrai : $A_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \det((A_1)_k) > 0, \exists !, A_1 = L_1 U_1$

$$A_1 = A_1^T = L_1 U_1 = (L_1 U_1)^T = U_1^T L_1^T = L_1 L_1^T$$

CC2

Soient a, b et c des réels strictement positifs et soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{pmatrix}.$$

Si $A_1 = L_1 U_1$ et $A_2 = L_2 D L_2^T$, alors $L_1 = L_2$.

Vrai : $A_1 \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \det((A_1)_k) > 0, \exists!, A_1 = L_1 U_1$

$$A_1 = A_1^T = L_1 U_1 = (L_1 U_1)^T = U_1^T L_1^T = L_1 L_1^T$$

On trouve

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = U_1^T$$

CC2

On a aussi $A_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\det(A_2) = abc > 0$ et $\det((A_2)_2) = ab > 0$, $\exists A_2 = L_2 D L_2^T$.

CC2

On a aussi $A_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\det(A_2) = abc > 0$ et $\det((A_2)_2) = ab > 0$, $\exists A_2 = L_2 D L_2^T$.
A-t-on $A_2 = L_1 D L_1^T$?

$$\begin{aligned}
L_1 \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} L_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 \\ d_1 & d_1 + d_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 + d_3 \end{pmatrix} \\
&= A_2
\end{aligned}$$

$(d_1 = a, d_2 = b, d_3 = c)$

CC2

Algorithme 1 : Factorisation de Cholesky pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$L_{1,1} \leftarrow \sqrt{A_{1,1}}$; **for** $j \leftarrow 2$ **to** n **do**

  $L_{j,1} \leftarrow \frac{A_{j,1}}{L_{1,1}}$;

end

for $i \leftarrow 2$ **to** $n-1$ **do**

  $k \leftarrow 1:(i-1)$; $\odot$; **for** $j \leftarrow i+1$ **to** n **do**

    $k \leftarrow 1:(i-1)$; $\circledast$;

  end

end

$k \leftarrow 1:(n-1)$; $\otimes$; **return** L;

CC2

Algorithme 2 : Factorisation de Cholesky pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$L_{1,1} \leftarrow \sqrt{A_{1,1}}$; **for** $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
    $L_{j,1} \leftarrow \frac{A_{j,1}}{L_{1,1}}$;
end
for $i \leftarrow 2$ **to** $n-1$ **do**
    $k \leftarrow 1:(i-1)$; $\odot$; **for** $j \leftarrow i+1$ **to** n **do**
        $k \leftarrow 1:(i-1)$; $\circledast$;
    end
end
$k \leftarrow 1:(n-1)$; $\otimes$; **return** L;

$$\odot : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} - \sum_{r \in k} L_{i,r}^2}$$

$$\circledast : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} - \sum_{r \in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$$

$$\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} - \sum_{r \in k} L_{n,r}^2}$$

CC2

Algorithme 3 : Décomposition de Cholesky

1 $L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$ `// 1:` $\surd$

CC2

Algorithme 4 : Décomposition de Cholesky

$L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$ `// 1:`$\surd$
for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
  $L_{j1} \leftarrow a_{j1}/L_{11}$ `//` $(n-1)$`:`$\oslash$
end

CC2

Algorithme 5 : Décomposition de Cholesky

$L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$ // 1 : $\surd$

for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**

  $L_{j1} \leftarrow a_{j1}/L_{11}$ // $(n-1)$: $\oslash$

end

for $i \leftarrow 2$ **to** $n-1$ **do**

  $L_{ii} \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$ // $(i-2)+1$: $\oplus\ominus$, $(i-1) : \otimes, 1 : \surd$

CC2

Algorithme 6 : Décomposition de Cholesky

$L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$ // 1 : $\surd$

for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**

  $L_{j1} \leftarrow a_{j1}/L_{11}$ // $(n-1)$: $\oslash$

end

for $i \leftarrow 2$ **to** $n-1$ **do**

  $L_{ii} \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$ // $(i-2)+1$: $\oplus\ominus$, $(i-1) : \otimes, 1 : \surd$

  for $j \leftarrow i+1$ **to** n **do**

    $L_{ji} \leftarrow \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{jk} L_{ik}}{L_{ii}}$ // $[n-(i+1)+1]((i-2)+1) : \oplus\ominus$
    // $[n-(i+1)+1]((i-1)+1) : \otimes\oslash$

  end

end

CC2

Algorithme 7 : Décomposition de Cholesky

$L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$ // 1 : $\surd$

for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**

  $L_{j1} \leftarrow a_{j1}/L_{11}$ // $(n-1)$: $\oslash$

end

for $i \leftarrow 2$ **to** $n-1$ **do**

  $L_{ii} \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$ // $(i-2)+1$: $\oplus\ominus$, $(i-1) : \otimes, 1 : \surd$

  for $j \leftarrow i+1$ **to** n **do**

    $L_{ji} \leftarrow \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{jk} L_{ik}}{L_{ii}}$ // $[n-(i+1)+1]((i-2)+1) : \oplus\ominus$

    // $[n-(i+1)+1]((i-1)+1) : \otimes\oslash$

  end

end

$L_{nn} \leftarrow \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{nk}^2}$ // $(n-2)+1$: $\oplus\ominus$, $(n-1) : \otimes, 1 : \surd$

return L;

$$N_{\oplus\ominus} = \sum_{i=2}^{n-1} (i-1) + (n-i)(i-1) = \sum_{i=2}^{n-1} (i-1)(1+n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

CC2

Soit $A \in \mathcal{S}_6^{++}(\mathbb{R})$ (une matrice pleine). Quel est le nombre total de soustractions/additions dans l'algorithme de factorisation de Cholesky de A?

CC2

Soit $A \in \mathcal{S}_6^{++}(\mathbb{R})$ (une matrice pleine). Quel est le nombre total de soustractions/additions dans l'algorithme de factorisation de Cholesky de A?

$$N_{\oplus\ominus} = \frac{6(6^2-1)}{6} = 35.$$

CC2

Soit le système linéaire suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

En partant de $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération $\vec{x}^{(1)}$ de la méthode de Jacobi ?

CC2

Soit le système linéaire suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

En partant de $\vec{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération de la méthode de Gauss-Seidel ?

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As the
unprocessed data that should have been added to the final page this ex
been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go a
LaTeX now knows how many pages to expect for this document.