



<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← **Cocher** votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**.

NOM :

.....

PRÉNOM :

.....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.

Les questions ont une unique bonne réponse.

Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases (i.e., ☒)**.

Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement (i.e., ■)**.

Des points négatifs seront affectés à de *mauvaises* réponses (2pt bonne, -0.5pt mauvaise).

Question 1 Soient a, b et c des réels strictement positifs et soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{pmatrix}.$$

Si $A_1 = L_1 U_1$ et $A_2 = L_2 D L_2^T$, alors $U_1 = L_2^T$.

☐ On ne peut pas conclure. ☐ Faux. ☐ Vrai.

Question 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $A^T A$ admet une décomposition de Cholesky.

☐ On ne peut pas conclure. ☐ Faux. ☐ Vrai.

Question 3 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU (sans permutation).

☐ On ne peut pas conclure. ☐ Vrai. ☐ Faux.

Question 4 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ est définie positive.

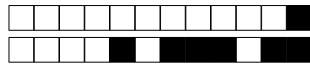
☐ Faux. ☐ Vrai. ☐ On ne peut pas conclure.

Question 5 Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $-A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

☐ Vrai. ☐ Faux. ☐ Pas nécessairement.

Question 6 Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $(A + B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

☐ Pas nécessairement. ☐ Vrai. ☐ Faux.



Question 7 Sélectionnez les instructions de remplacement appropriées pour les blancs marqués \odot , \otimes \otimes .

Algorithme 1 : Factorisation de Cholesky pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

```

1  $L_{1,1} \leftarrow \sqrt{A_{1,1}}$ ; for  $j \leftarrow 2$  to  $n$  do
2    $L_{j,1} \leftarrow \frac{A_{j,1}}{L_{1,1}}$ ;
3 end
4 for  $i \leftarrow 2$  to  $n-1$  do
5    $k \leftarrow 1 : (i-1)$ ;  $\odot$ ; for  $j \leftarrow i+1$  to  $n$  do
6      $k \leftarrow 1 : (i-1)$ ;  $\otimes$ ;
7   end
8 end
9  $k \leftarrow 1 : (n-1)$ ;  $\otimes$ ; return  $L$ ;
```

☐ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} - \sum_{r \in k} L_{n,r}^2}$; $\otimes : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} - \sum_{r \in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$; $\odot : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} - \sum_{r \in k} L_{i,r}^2}$
☐ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} - \sum_{r \in k} L_{n,r}^2}$; $\otimes : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} - \sum_{r \in k} L_{i,r}^2}$; $\odot : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} - \sum_{r \in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$
☐ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} + \sum_{r \in k} L_{n,r}^2}$; $\otimes : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} + \sum_{r \in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$; $\odot : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} + \sum_{r \in k} L_{i,r}^2}$
☐ $\otimes : L_{n,n} \leftarrow \sqrt{A_{n,n} + \sum_{r \in k} L_{n,r}^2}$; $\otimes : L_{i,i} \leftarrow \sqrt{A_{i,i} + \sum_{r \in k} L_{i,r}^2}$; $\odot : L_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j,i} + \sum_{r \in k} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$

Question 8 Soit $A \in S_6^{++}(\mathbb{R})$ (une matrice pleine). Quel est le nombre total de soustractions/additions dans l'algorithme de factorisation de Cholesky de A (un chiffre par ligne, i.e., centaines, dizaines, unités) ?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Question 9 Soit le système linéaire suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

En partant de $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 4)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération $\vec{x}^{(1)}$ de la méthode de Jacobi ?

☐ $(1, 3, 1)^T$ ☐ $(1, 1, 1)^T$ ☐ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ ☐ $(1, -1, 1)^T$ ☐ $(2, 2, 2)^T$ ☐ $(1, 2, 1)^T$

Question 10 Soit le système linéaire suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

En partant de $\vec{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération de la méthode de Gauss-Seidel ?

☐ $(1, 2, 2)^T$ ☐ $(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T$ ☐ $(2, 3, 3)^T$ ☐ $(2, 2, 2)^T$ ☐ $(1, 2, 1)^T$ ☐ $(1, 1, 1)^T$