Méthodes Numériques **durée : 2h** **Partiel 11/05/2023**

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

$\Longleftarrow$ **Cocher** votre numéro d'étudiant ci-contre (premier chiffre dans la première colonne, etc.), et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous en **MAJUSCULES**, ainsi que sur votre copie, dans laquelle vous insérerez votre sujet avant restitution.

NOM :

....

PRÉNOM :

....

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Pour avoir les points d'une ♣ il faut cocher la ou toutes les bonnes réponses.
Utiliser un stylo noir (ou bleu) et il est important de bien **cocher les cases (i.e., ☒)**.
Vous pouvez corriger une case cochée par erreur en la **noircissant entièrement (i.e, ■)**.
Des points négatifs seront affectés à de *mauvaises* réponses (1pt bonne, -0.25pt mauvaise).

Exercice 1

Question 1 Quel est l'intervalle initial approprié pour calculer une racine positive de l'équation $f(x) = 2x\cos(\pi x) - e^{x-1} = 0$ en utilisant la méthode de dichotomie ?

☐ $[0, 2]$ ☐ $[-1, 1]$ ☐ $[0, 1]$ ☐ $[-1, 0]$

Question 2 On dispose d'une liste de valeurs pour la fonction $f(x) = x + 10 - e^x$ en différents points :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	9.000	8.282	4.611	-7.086	-40.598

Effectuez trois itérations de la méthode de dichotomie pour résoudre $f(x) = 0$ sur l'intervalle initial $[0, 4]$. Quelle est l'approximation de la racine ?

☐ 1.5 ☐ 3.5 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 0 ☐ 2.5 ☐ 1 ☐ 2

Exercice 2

Question 3 On considère l'itération de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$ avec $g(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3x}$. À quel(s) problème(s) de recherche de racines est/sont équivalent(s) cette méthode ?

☐ $x^2 - 2 = 0$ ☐ $\frac{1}{3} - \frac{4}{3x^2} = 0$ ☐ $x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3x^2} = 0$
☐ $\frac{x}{3} + \frac{4}{3x} = 0$

Question 4 Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in [0,1]$. Quelles sont la ou toutes les méthodes d'itération de point fixe convergentes pour résoudre l'équation $\cos(x) - x = 0$?

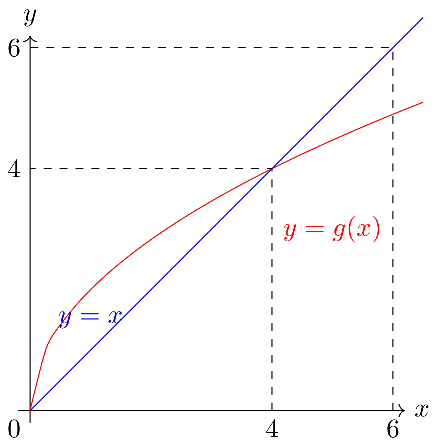
I. $x_{k+1} = g(x_k) = \cos(x_k)$
II. $x_{k+1} = g(x_k) = x + 1$
III. $x_{k+1} = g(x_k) = x_k + \tan(x_k)$
IV. $x_{k+1} = g(x_k) = \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\cos(x_k)$

☐ III
☐ II et III
☐ I et III
☐ I, III et IV
☐ II, III et IV
☐ IV
☐ I, II, III et IV
☐ I, II et IV
☐ I et II
☐ I et IV
☐ I, II et III
☐ II
☐ III et IV
☐ I

Question 5 ♣ On considère l'itération de point fixe suivante : $x_{k+1} = g(x_k) = 2x_k - ax_k^2$. Trouver les points fixes de g et donner la ou les conditions sur a et x_0 pour garantir que l'itération converge vers l'un de ces points fixes x^*.

☐ $0 < a < 2x_0$, $|x_0 - 1/a| > 1/(2a)$, et $x^* = 1/a$
☐ $0 < a < 2x_0$, $|x_0 - 1/a| < 1/(2a)$, et $x^* = 2/a$
☐ $0 < a < 1/x_0$, $|x_0 - 1/a| < 1/a$, et $x^* = 0$
☐ $a > 0$, $|x_0 - 1/a| > 1/a$, et $x^* = 0$
☐ $0 < a < 1/x_0$, $|x_0 - 1/a| > 1/a$, et $x^* = 0$
☐ $a > 0$, $|x_0 - 1/a| < 1/a$, et $x^* = 1/a$
☐ $0 < a < 2x_0$, $|x_0 - 1/a| < 1/a$, et $x^* = 0$
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 Les points d'intersection entre les courbes $y = x$ et $y = g(x)$ sont $x = 0$ et $x = 4$. Laquelle des affirmations suivantes concernant l'itération de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$ est VRAIE ?



I. Si $x_0 = 2$, alors x_k converge vers 4.
II. Si $x_0 = 1$, alors x_k converge vers 0.
III. Si $x_0 = 6$, alors x_k converge vers 4.

☐ I
☐ I, II et III
☐ I et III
☐ III
☐ on ne peut pas conclure
☐ I et II
☐ II et III
☐ II

Exercice 3

Question 7 Pour quelles valeurs de x la méthode de Newton présente-t-elle un ordre de convergence linéaire et quadratique lorsqu'elle est appliquée à la fonction $f(x) = x(x-3)^2$?

☐ linéaire près de $x = 0$ et près de $x = 3$.
☐ quadratique près de $x = 0$ et près de $x = 3$.
☐ linéaire près de $x = 3$ et quadratique près de $x = 0$.
☐ linéaire près de $x = 0$ et quadratique près de $x = 3$.

Question 8 Si une méthode itérative a pour effet d'élever au carré l'erreur toutes les deux iterations, alors quelle est son ordre de convergence ?

- [ ] 0.5
- [ ] 1
- [ ] 4
- [ ] 2
- [ ] $\sqrt{2}$

Question 9 ♣ Quelle(s) affirmation(s) est/sont VRAIE(S) ?

- [ ] La dichotomie est toujours plus rapide que la méthode de point fixe pour converger vers une racine.
- [ ] Lorsqu'elle converge, la méthode du point fixe converge toujours plus vite que la dichotomie.
- [ ] Les méthodes de point fixe et de dichotomie ont toujours le même ordre de convergence.
- [ ] Si $g(x)$ satisfait $1/2 < |g'(x^*)| < 1$, alors la méthode de point fixe converge plus rapidement que la dichotomie.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Quelle est/sont la/les caractéristiques qui rend(ent) la méthode de Newton attrayante pour la recherche de racines ?

- [ ] Elle peut trouver une solution à l'équation $7x^8 + x^4 + 1 = 0$.
- [ ] Elle peut déterminer de manière fiable toutes les racines réelles d'un polynôme de degré n.
- [ ] Elle converge plus rapidement que les autres méthodes de recherche de racines.
- [ ] Elle peut être utilisée pour trouver rapidement et avec précision des approximations de racine n-ième.

Question 11 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(a)f(b) < 0$. Parmi les énoncés ci-dessous concernant la convergence de la méthode de la dichotomie, lequel est VRAI ?

I. La méthode est toujours garantie de converger.
II. L'ordre de convergence est linéaire.
III. La vitesse de convergence asymptotique est de $1/2$.
IV. L'erreur absolue à la première étape vérifie $|x_1 - x^*| \leq (b - a)2^{-1}$.

- [ ] III
- [ ] I, III et IV
- [ ] I, II, III et IV
- [ ] I et IV
- [ ] I et II
- [ ] II
- [ ] II et III
- [ ] IV
- [ ] III et IV
- [ ] I, II et IV
- [ ] II, III et IV
- [ ] I et III
- [ ] I, II et III
- [ ] I

Exercice 4

On souhaite déterminer le nombre d'opérations nécessaires pour factoriser $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ par la méthode de Cholesky. On rappelle que les éléments diagonaux de L sont données par $L_{i,i} = \sqrt{A_{i,i} - \sum_{r=1}^{i-1} L_{i,r}^2}$ et les autres éléments par $L_{j,i} = \frac{A_{j,i} - \sum_{r=1}^{i-1} A_{j,r} L_{i,r}}{L_{i,i}}$.

Question 12 Quel est le nombre total de multiplications/divisions/racines carrés nécessaire ?

- [ ] $n^3/3 + n/3$
- [ ] $n^3/6 + n/2$
- [ ] $n^3/6 - n/2$
- [ ] $n^3/6 + n^2/2 - n/3$
- [ ] $n^3/6 + n^2/2 - 5n/6$
- [ ] $n^2 + 3n$
- [ ] $n^3/3 - n/3$
- [ ] $n^3/6 - n/6$
- [ ] $n^2 - 3n$

Question 13 Quel est le nombre total de soustractions/additions ?

- [ ] $n^3/6 - n/6$
- [ ] $n^3/6 + n^2/2 - n/3$
- [ ] $n^3/6 - n/2$
- [ ] $n^2 - 3n$
- [ ] $n^3/3 + n/3$
- [ ] $n^3/6 + n/2$
- [ ] $n^2 + 3n$
- [ ] $n^3/3 - n/3$
- [ ] $n^3/6 + n^2/2 - 5n/6$

Question 14 Quel est le nombre total d'opérations ?

- ☐ $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{2}{3}n$
- ☐ $\frac{n(3n^2-3n-2)}{6}$
- ☐ $\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3}$
- ☐ $n^3/3 + n^2/2 + n/6$
- ☐ $\frac{n(3n^2+3n-2)}{6}$
- ☐ $n^3/3 + n^2/2 - 5n/6$
- ☐ $n^3/3 - n^2/2 + n/6$
- ☐ $n2^2 + 6n$
- ☐ $\frac{n(2n^2+3n-3)}{6}$

Exercice 5

Question 15 Soit le système linéaire suivant sous forme de matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

En partant d'une estimation initiale $\vec{x}^{(0)} = (1,1,1)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération de la méthode de Jacobi ?

- ☐ $\vec{x}^{(1)} = (\frac{3}{5}, 2, 5)^T$
- ☐ Jacobi diverge
- ☐ $\vec{x}^{(1)} = (\frac{3}{5}, 2, 2)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(1)} = (\frac{2}{5}, 2, 1)^T$

Question 16 Soit le système linéaire suivant sous forme de matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

En partant d'une estimation initiale $\vec{x}^{(0)} = (1,1,1)^T$, quelle est le résultat de la 1ère itération de la méthode de Gauss-Seidel ?

- ☐ $\vec{x}^{(1)} = (\frac{3}{5}, 2, 2)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(1)} = (\frac{2}{5}, 2, 1)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(1)} = (\frac{3}{5}, 2, 5)^T$
- ☐ Gauss-Seidel diverge

Question 17 Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

La solution de ce système est $(1, 2, -1)^T$.

- ☐ Jacobi diverge et Gauss-Seidel diverge.
- ☐ Jacobi converge et Gauss-Seidel diverge.
- ☐ Jacobi converge et Gauss-Seidel converge.
- ☐ Jacobi diverge et Gauss-Seidel converge.

Question 18 Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Trouver la première itération de la méthode de Jacobi pour ce système linéaire en utilisant $\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$.

- ☐ $\vec{x}^{(2)} = (25/20, -4/7, 3/15)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(2)} = (25/20, -4/7, 3/15)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(2)} = (5/4, -4/3, 1/5)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(2)} = (5/6, -4/5, 3/15)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(2)} = (5/4, -4/5, 3/15)^T$
- ☐ $\vec{x}^{(2)} = (5/6, -4/5, 3/15)^T$

Question 19 Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

La solution de ce système est $(1, 2, -1)^T$.

- ☐ Jacobi diverge et Gauss-Seidel diverge.
- ☐ Jacobi converge et Gauss-Seidel diverge.
- ☐ Jacobi converge et Gauss-Seidel converge.
- ☐ Jacobi diverge et Gauss-Seidel converge.

Question 20 On applique la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre un système linéaire ayant une matrice d'itération T avec un rayon spectral $\rho(T) = 0,998$. En utilisant l'erreur initiale $\vec{e}^{(0)}$ mesurée par la norme 2 et le fait que $\log_{10}(0,998) \approx -0,0009$, environ combien d'itérations sont nécessaires pour réduire $\vec{e}^{(0)}$ d'un facteur de 10^{-6} ?

- ☐ 600
- ☐ 60000
- ☐ 6000
- ☐ 6
- ☐ 60