

Méthodes Numériques

L2 MIASHS

Fabien Navarro

E-mail: fabien.navarro@univ-paris1.fr



Descriptif du Cours

Organisation :

- Cours le jeudi de 14h-15h (12h) et TD/TPs en R (30h) (supports des TD/TPs accessibles ici : <https://fnavarro.perso.math.cnrs.fr/MNL2MIASHS.html>) ;
- Modalités d'évaluation : 2 **contrôles continus** d'1h30 (CC) et un **examen final** (Par) de 2h en mai

$$\text{Note finale} = \max \left(\frac{1}{2} (\max(\text{CC1}, \text{CC2}) + \text{Bonus}) + \frac{1}{2} \text{Par}, \text{Par} \right).$$

CC1 : 13/03/24 de 19h-20h30 AMPHI N ;

CC2 : 17/04/24 de 19h-20h30 AMPHI N.

Descriptif du Cours

Présentation :

Étude des méthodes numériques d'approximation de certains problèmes issus de différents domaines de l'ingénierie (e.g., économique, science des données, finance,...).

L'accent sera mis sur deux aspects :

- exposé et analyse mathématiques (CM) ;
- comportement de telles méthodes numériques vis-à-vis des problèmes à résoudre (TD/TP).
- les TDs/TPs se dérouleront en R. Un document introductif pour l'installation est accessible ici.

Descriptif du Cours

Le plan du cours est accessible ici.

Contenu

Chapitre 1 : Résolution des équations non-linéaires ($f(x) = 0$).

- Méthode de dichotomie, méthodes de type point fixe, méthode de Newton.

Chapitre 2 : Résolution de systèmes linéaires ($A\vec{x} = \vec{b}$).

- Méthodes directes (e.g., LU).

Chapitre 3 : Résolution de systèmes linéaires ($A\vec{x} = \vec{b}$).

- Méthodes itératives (e.g., gradient).

Chapitre 4 : Interpolation ($f(x_i) = y_i$).

- Interpolation de Lagrange.

Chapitre 5 : Intégration numérique ($\int f(x)$).

- Méthodes de quadratures (e.g., Gauss).
- Méthode de Monte-Carlo.

Démarche

- 1 Position du problème :
 - ▶ Modélisation mathématique.
- 2 Analyse mathématique :
 - ▶ Existence de solutions.
 - ▶ Unicité.
 - ▶ Analyse des solutions.
- 3 Analyse numérique :
 - ▶ Méthode pour approcher les solutions.
 - ▶ Analyse de la méthode (erreur, convergence).
 - ▶ Mise en oeuvre.

Chapitre 1 : Résolution d'équations non linéaires

- 1 1.0 Rappels
- 2 1.1 Introduction
- 3 1.2 Méthode de dichotomie
- 4 1.3 Méthodes itératives de type point fixe
- 5 1.4 La méthode de Newton

- L'estimateur des moindres carrés ordinaires dans le modèle de régression (linéaire ou non-linéaire) multiple. Revient à résoudre un système linéaire de la forme $A\vec{x} = \vec{b}$.
- Les estimateurs pénalisés pour la régression en grande dimension.
- L'entraînement d'un réseau de neurones en apprentissage profond.
- Le débruitage ou la restauration d'image.
- ...

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

Les concepts de *limite* et de *continuité* d'une fonction sont fondamentaux dans l'étude du calcul différentiel et intégral.

DÉFINITION (Limite)

Une fonction f définie sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ admet une limite L en x_0 , notée

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

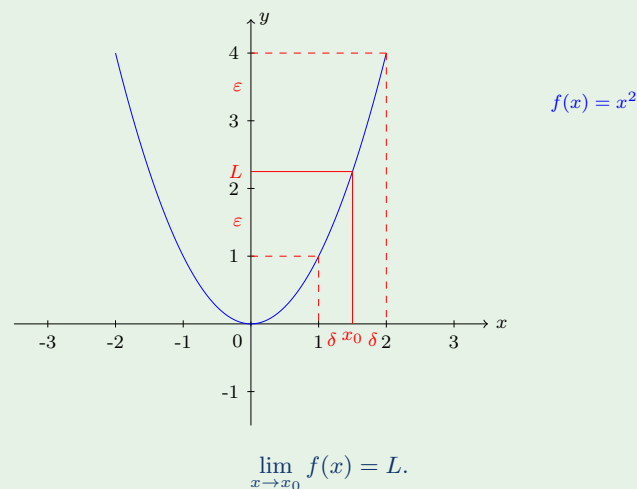
si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in X$ vérifiant $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

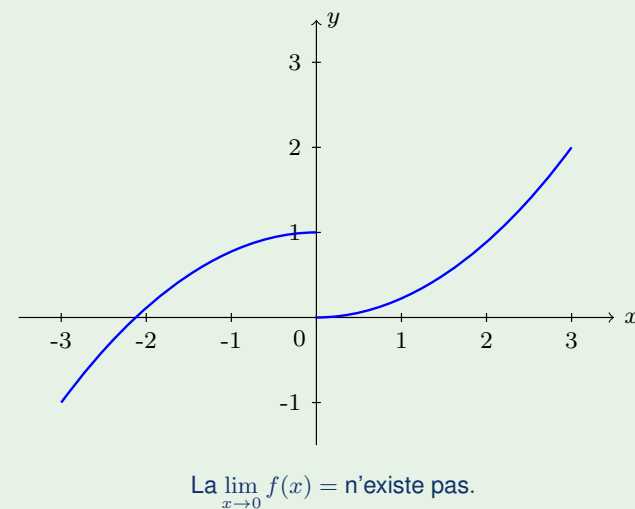
EXEMPLE 1



1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

EXEMPLE 2



1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

DÉFINITION (Continuité)

Soit f une fonction définie sur un ensemble X de nombres réels et soit $x_0 \in X$.
On dit que f est **continue** en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction f est continue sur l'ensemble X si elle est continue en tout point de X .

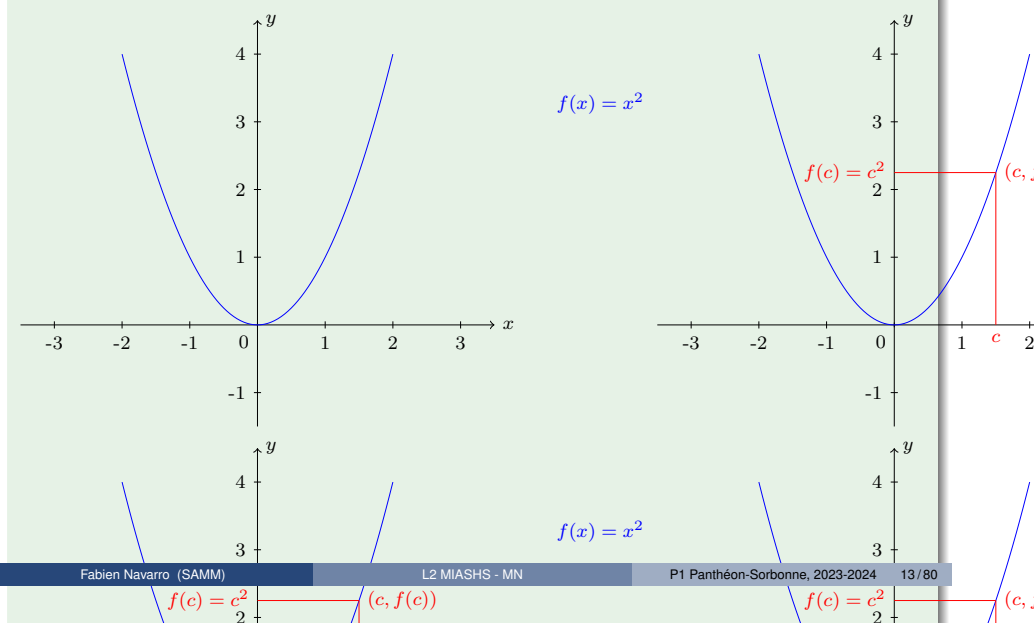
REMARQUES

- $C(X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur X .
- Lorsque X est un intervalle de \mathbb{R} , les $()$ dans cette notation seront omises.
- Par exemple, on notera $C[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

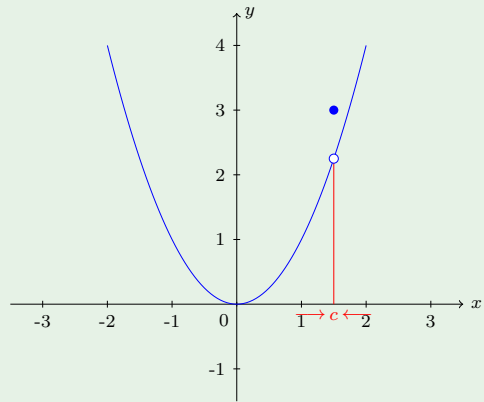
EXEMPLE 1 (suite)



1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

EXEMPLE 3



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \neq c \\ 3 & \text{if } x = c \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = c^2 \neq f(c) = 3$$

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

La limite d'une suite de nombres réels ou complexes est définie de manière similaire.

DÉFINITION (Convergence d'une suite)

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite infinie de nombres réels ou complexes.

La suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a pour limite x (converge vers x) si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n - x| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

On note

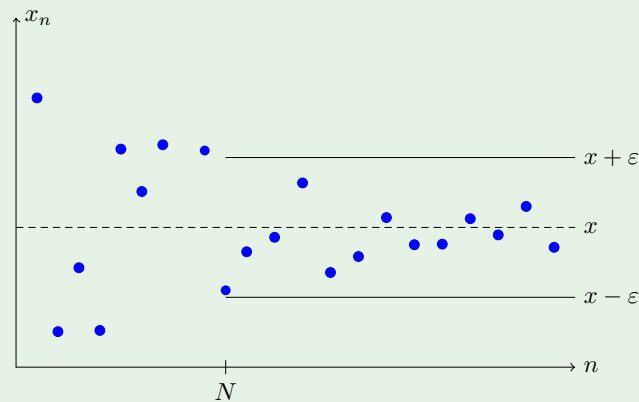
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow x \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty,$$

pour signifier que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers x .

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

EXEMPLE 4



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

Théorème

Si f est une fonction définie sur un ensemble X de nombres réels et $x_0 \in X$,

Alors, les énoncés suivants sont équivalents :

- 1 f est continue en x_0 ;
- 2 Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque dans X qui converge vers x_0 , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

REMARQUE

- Lors de l'analyse des méthodes numériques, les fonctions considérées seront continues (la continuité étant une condition minimale pour assurer un comportement prévisible).

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

DÉFINITION (Dérivabilité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0 . La fonction f est dérivable en x_0 si

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

existe.

Le nombre $f'(x_0)$ est appelé la dérivée de f en x_0 .

Une fonction ayant une dérivée en chaque point d'un ensemble X est dérivable sur X .

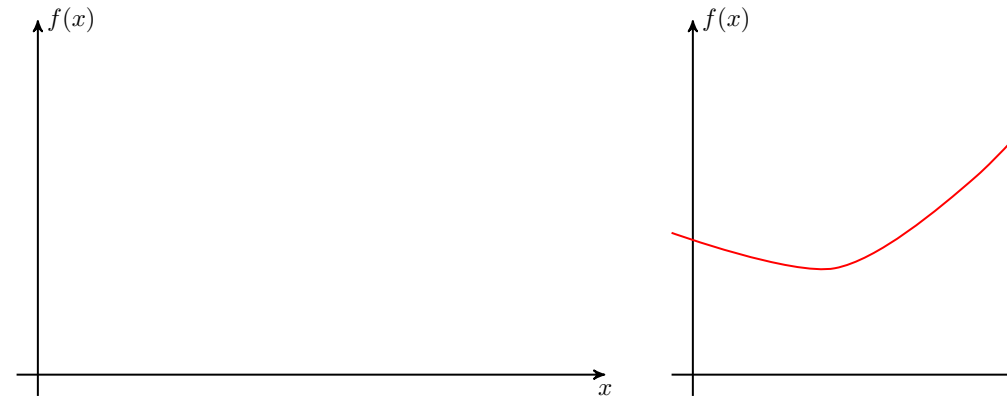
Théorème (Dérivabilité \Rightarrow Continuité)

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

Taux d'accroissement de f en a



$$\text{Pente de } PQ = \frac{QD}{PD} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

$$f'(x_0) = \text{pente de la tangente au point } P(x_0, f(x_0)).$$

1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

REMARQUES

- L'ensemble des fonctions admettant n dérivées continues sur X est noté $C^n(X)$;
- celui des fonctions ayant des dérivées de tous ordres sur X est noté $C^\infty(X)$;
- Lorsque X est un intervalle de la droite réelle, nous omettons de nouveau les parenthèses dans cette notation.

Les théorèmes suivants sont d'une importance fondamentale pour dériver des méthodes d'estimation de l'erreur.

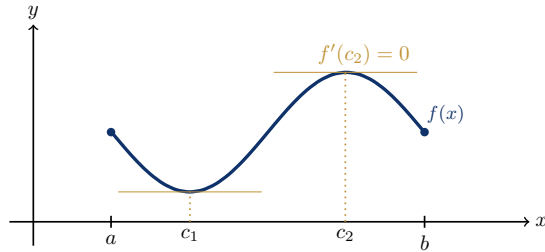
1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

Théorème de Rolle

Supposons que $f \in C[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



1. Équations non linéaires

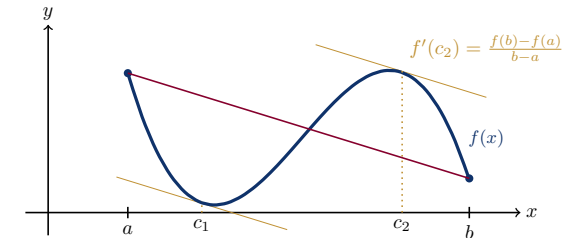
1.0 Rappels

Théorème des accroissements finis

Si f appartient à $C[a, b]$ et f est dérivable sur $]a, b[$,

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



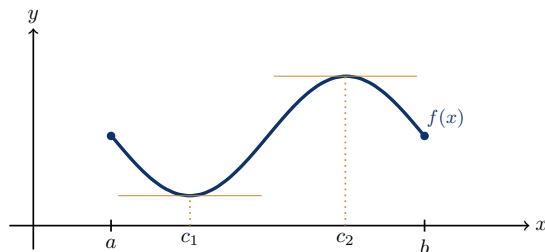
1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

Théorème des valeurs extrêmes

Si $f \in C[a, b]$, alors $\exists c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que : $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2), \forall x \in [a, b]$.

Si, de plus, f est dérivable sur $]a, b[$, alors elle atteint ses bornes soit aux extrémités de $[a, b]$, soit là où $f'(x) = 0$.



1. Équations non linéaires

1.0 Rappels

Théorème de Taylor

Soit $f \in C^n[a, b]$ admettant une dérivée d'ordre $n + 1$ sur $[a, b]$, et soit $x_0 \in [a, b]$.

Alors, pour tout $x \in]a, b[$, $\exists \xi(x) \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

1. Équations non linéaires

1.1 Introduction

But

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée.

On veut trouver numériquement un ou plusieurs zéros de f ,

i.e., Trouver $x^* \in I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x^*) = 0$.

Approche

Construire une suite x_0, x_1, \dots, x_n tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Outils

La plupart des méthodes reposent sur deux théorèmes fondamentaux :

- Théorème des valeurs intermédiaires ;
- Théorème du point fixe.

1. Équations non linéaires

1.1 Introduction

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

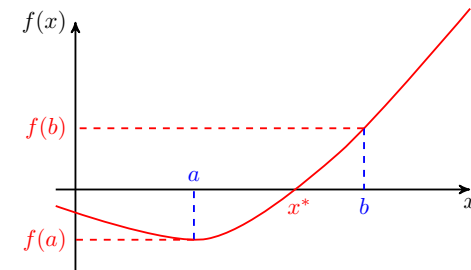
Soit $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $k \in [f(a), f(b)]$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que : $f(x_0) = k$.

En particulier (Th de Bolzano),

Si $f(a)f(b) < 0$ (f change de signe), alors $\exists x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$.

TVI \Rightarrow existence d'une (ou des) solution(s) de $f(x) = 0$.



1. Équations non linéaires

1.1 Introduction

Théorème du point fixe

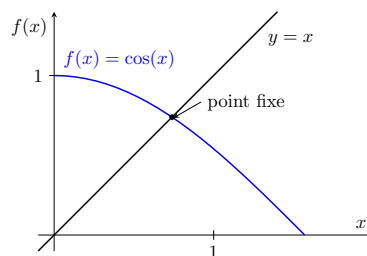
(i) Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. (existence)

Alors g admet un point fixe, i.e. : $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tel que $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

(ii) Si de plus, g est dérivable, et s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que (unicité)

$$|g'(x)| \leq k \text{ pour tout } x \in [a, b],$$

alors le point fixe \bar{x} est unique.



1. Équations non linéaires

1.1 Introduction

EXEMPLES

- 1 Calcul des racines d'un polynôme, e.g, $x^6 - 2x - 1 = 0$.
- 2 Recherche de points critiques, $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, x est un point critique de f si $f'(x) = 0$.
- 3 Calcul approché de racines carrées, soit $a > 0$, on cherche $x \in \mathbb{R}$, tel que $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0$
- 4 Calcul approché de la réciproque d'un réel $a \neq 0$, trouver $x = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - a = 0$.
- 5 Intersection de courbes, e.g, $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos(x) - x = 0$.
- 6 ...

1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

Le TVI nous donne une première méthode d'approximation des solutions de $f(x) = 0$:

Méthode de dichotomie (ou de la bisection)

Hypothèses : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (i) f est continue ;
- (ii) $f(a)f(b) < 0$;
- (iii) f admet dans $[a, b]$ une racine unique.

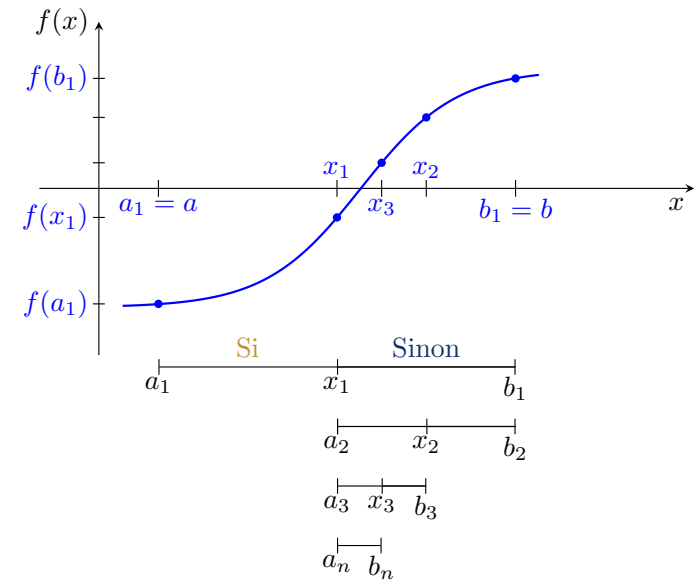
Principe (mise en oeuvre en TP) :

- 1 Initialisation : on choisit $a_1 = a$ et $b_1 = b$ et on pose $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et on calcul $f(x_1)$.
- 2 Si $f(a_1)f(x_1) < 0$, alors $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$ et $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$;
- 3 Sinon $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$ et $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$
- 4 Répéter 2-3 tant que "test d'arrêt" non satisfait.

Remarque : $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$.

1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie



1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

EXEMPLE 1

On considère la fonction $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10.$$

f est continue sur $[1, 2]$ (polynôme). On a $f(1) = -5$ et $f(2) = 14 \Rightarrow f(1)f(2) < 0$.

TVI \Rightarrow existence d'une solution $x^* \in [1, 2]$ telle que $f(x^*) = 0$.

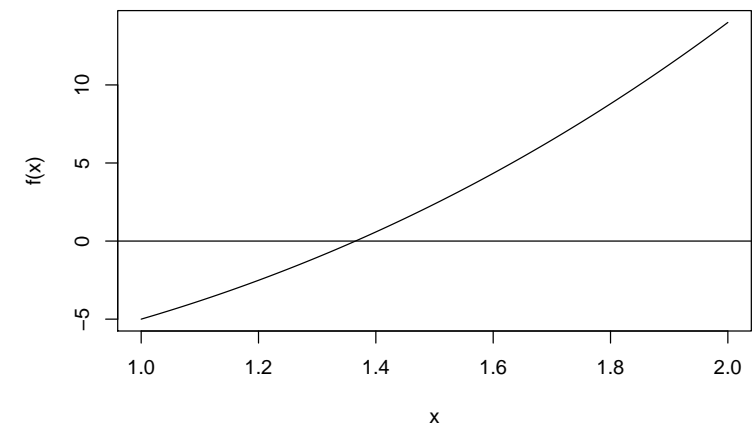
```
f <- function(x) {y <- x^3+4*x^2-10}
a <- 1
b <- 2
cat(paste("f(a)=", f(a), sep=""),
    paste("f(b)=", f(b), sep=""),
    paste("f(a)f(b)=", f(a)*f(b), sep=""))
```

```
## f(a)=-5 f(b)=14 f(a)f(b)=-70
```

1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

```
curve(f, from = 1, to = 2)
abline(h=0)
```



1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

1 Initialisation : $a_1 = a$ et $b_1 = b$ et on pose $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

```
# 1. Initialisation
a1 <- a; b1 <- b; x1 <- (a1 + b1)/2; cat(f(x1))
```

```
## 2.375
```

2 Si $f(a_1)f(x_1) < 0$, alors $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$ et $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.

```
f(a1)*f(x1) < 0
```

```
## [1] TRUE
```

```
a2 <- a1; b2 <- x1; x2 <- (a2 + b2)/2; cat(f(x2))
```

```
## -1.796875
```

```
f(a2)*f(x2) < 0
```

```
## [1] FALSE
```

```
a3 <- x2; b3 <- b2; x3 <- (a3 + b3)/2; cat(f(x3))
```

```
## 0.1621094
```

```
...
```

1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

n	x_n	$f(x_n)$
1	1.2500	-1.7969
2	1.3750	0.1621
3	1.3125	-0.8484
4	1.3438	-0.3510
5	1.3594	-0.0964
6	1.3672	0.0324
7	1.3633	-0.0321
8	1.3652	0.0001
9	1.3643	-0.0160
10	1.3647	-0.0080

1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

Algorithme 1 : Méthode de dichotomie

Entrées : $a, b, \varepsilon, f, Nmax$;

Sorties : x^*, n ;

1 Initialisation;

2 $n \leftarrow 0$;

3 $an \leftarrow a$;

4 $bn \leftarrow b$;

5 $x_n \leftarrow \frac{an+bn}{2}$;

6 while $|bn - an| < \varepsilon$ & $n < Nmax$ do

7 if $f(an)f(x_n) < 0$ then

8 | $bn \leftarrow x_n$;

9 else

10 | $an \leftarrow x_n$;

11 end

12 $x_n \leftarrow \frac{an+bn}{2}$;

13 $n \leftarrow n + 1$;

14 end

15 $x^* \leftarrow x_n$;

1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

Théorème (convergence dichotomie)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(a)f(b) \leq 0$.

La méthode de dichotomie génère une suite $(x_n)_n$ qui vérifie :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

1. Équations non linéaires

1.2 Méthode de dichotomie

PREUVE

Montrons (par récurrence) d'abord que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Pour $n = 1$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2^{1-1}} = b - a$.

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} & \text{Si } a_n \leq x^* \\ b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2} & \text{Sinon} \end{cases} = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{\text{HR}}{=} \frac{b-a}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Or, comme $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ pour tout $n \geq 1$ et comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}.$$

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers x^* , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Que peut-on déduire de cette borne ?

A partir de quel rang a-t-on $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$ (où $\varepsilon > 0$) (TD2) ?

1. Équations non linéaires

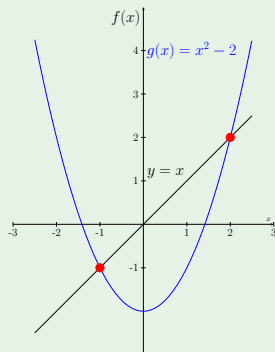
1.3 Méthodes itératives de type point fixe

EXEMPLE 1

Les points fixes de la fonction $g(x) = x^2 - 2$ sont obtenus en résolvant $g(x) = x$. Autrement dit, lorsque le graphe de $y = g(x)$ intersecte le graphe de $y = x$.

$$x = g(x) = x^2 - 2 \implies 0 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

Donc g admet deux points fixes, un en $x = -1$ et l'autre en $x = 2$.



1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

DÉFINITION (Point fixe)

Un **point fixe** d'une fonction est un point pour lequel la valeur de la fonction ne change pas lorsqu'elle est évaluée sur ce dernier.

- x est un point fixe pour une fonction donnée g si $g(x) = x$.

Objectif : Dans cette section, nous considérons le problème de trouver des solutions aux problèmes de points fixes et la connexion entre les problèmes de points fixes et les problèmes de recherche de racines que nous souhaitons résoudre (i.e., $f(x) = 0$).

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

DÉFINITION (Méthode de point fixe)

Une méthode de point fixe pour résoudre $f(x) = 0$ consiste en :

- 1 transformer le problème $f(x) = 0$ en un problème de type $g(x) = x$.
- 2 générer une suite $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné,} \\ x_{n+1} = g(x_n), & n \geq 0, \end{cases}$$

avec

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ tel que : $g(\bar{x}) = \bar{x}$.
- ▶ $x^* = \bar{x}$, où $f(x^*) = 0$.

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

REMARQUES

1 \exists une infinité de façons pour transformer $f(x) = 0$ en un problème équivalent de la forme $g(x) = x$.

- ▶ $f(x) = 0 \iff f(x) + x = x, \quad g(x) = f(x) + x;$
- ▶ on peut poser $g(x) = x + \alpha f(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2 Si la suite $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné,} \\ x_{n+1} = g(x_n), & n \geq 0, \end{cases}$$

et si g est continue, alors

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

est nécessairement un point fixe de g .

En effet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x} = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(\bar{x}).$$

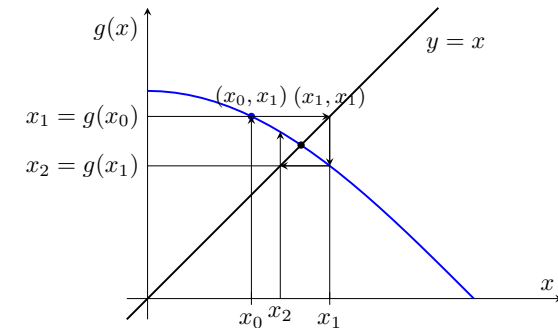
1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

Méthode de point fixe

Principe : Pour approcher le point fixe d'une fonction g

- 1 Initialisation : on choisit une approximation initiale $x_0 \in [a, b]$.
- 2 On génère la suite $(x_n)_n$ par $x_{n+1} = g(x_n)$, pour $n \geq 1$.



1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

EXEMPLE 1 (suite)

On considère la fonction $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10.$$

f admet une racine unique dans $[1, 2]$.

Il y a de nombreuses façons de transformer l'équation sous la forme d'un point fixe $x = g(x)$ en utilisant des manipulations algébriques simples.

Par exemple,

(a) $f(x) = 0 \iff x = g_a(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10.$

(b) $f(x) = 0 \iff x^2 = \frac{10-4x^2}{x} \iff g_b(x) = x \text{ avec } g_b(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}.$

(c) $f(x) = 0 \iff x^2 = 10 - 4x \iff x^2 = \frac{10-x^3}{4} \iff g_c(x) = x \text{ avec } g_c(x) = \sqrt{\frac{10-x^3}{4}}.$

(d) $f(x) = 0 \iff x^2(x+4) = 10 \iff x^2 = \frac{10}{x+4} \iff g_d(x) = x \text{ avec } g_d(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}.$

(e) $f(x) = 0 \iff x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \iff g_e(x) = x \text{ avec } g_e(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}.$

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

La racine réelle est 1.365230013.

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.816	51.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
10			1.367846968	1.365230576	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

Convergence rapide pour $(c - e)$, alors que (a) diverge et que (b) devient indéfinie

En comparaison la méthode de dichotomie requiert 27 itérations pour cette précision (contre 4 pour (e)).

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

Comment peut-on trouver un problème de point fixe qui produit une suite qui converge de manière fiable et rapidement vers une solution à un problème de recherche de racine donné ?

Pour établir des critères de convergences de suites $(x_n)_n$, on introduit la définition suivante :

DÉFINITION (fonction contractante)

Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. g est dite **contractante** sur $[a, b]$ s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que :

$$\forall x, y \in [a, b] : |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|.$$

Autrement dit, la fonction g est contractante si elle rapproche les points d'un rapport $k < 1$.

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

Théorème (convergence point fixe)

Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

- (i) Soit $g([a, b]) \subset [a, b]$ (i.e., $\forall x \in [a, b] : g(x) \in [a, b]$)
- (ii) Si de plus, g est une **contraction** sur $[a, b]$.

Alors

- (i) g admet un unique point fixe \bar{x} sur $[a, b]$ (existence & unicité)
- (ii) Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite $(x_n)_n$ définie par (convergence)

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \geq 0$$

est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

PREUVE I (existence)

Montrons d'abord que g admet un point fixe $x^* \in [a, b]$, i.e., x^* tel que $g(x^*) = x^*$.
($x^* = g(x^*)$ point fixe $\Leftrightarrow g(x^*) - x^* = 0 \Leftrightarrow f(x^*) = 0$, (avec $f = g - I$))

Par hypothèse, on a

- (i) $g([a, b]) \subset [a, b]$,
- (ii) g contractante $\Rightarrow g$ continue (Exercice).

Par suite,

$$\begin{aligned} g(a) \in [a, b] &\Leftrightarrow a \leq g(a) \leq b \Rightarrow f(a) = g(a) - a \geq 0 \\ g(b) \in [a, b] &\Leftrightarrow a \leq g(b) \leq b \Rightarrow f(b) = g(b) - b \leq 0 \end{aligned}$$

Donc f s'annule sur $[a, b]$ et g admet un point fixe, i.e., (TVI)

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow g(x^*) = x^*.$$

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

PREUVE II (unicité)

Montrons, que x^* est unique dans $[a, b]$.

Supposons qu' $\exists x^*$ et $y^* \in [a, b]$, i.e., $x^* = g(x^*)$ et $y^* = g(y^*)$.

Comme g est contractante, on a,

$$|x^* - y^*| = |g(x^*) - g(y^*)| \leq k|x^* - y^*|, \quad k \in [0, 1[$$

i.e.,

$$|x^* - y^*| - k|x^* - y^*| \leq 0$$

avec $(1 - k) > 0$ et $|x^* - y^*| \geq 0$.

Ceci n'est possible que pour $|x^* - y^*| = 0$, donc $x^* = y^*$.

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

PREUVE III (convergence)

Montrons que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} .
Pour cela, remarquons que, pour $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |g(x_n) - g(x_{n-1})| \\ &\leq k|x_n - x_{n-1}|, \quad k \in [0, 1[\\ &\leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\vdots \\ &\leq k^n|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

i.e.,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

PREUVE IV (convergence)

Montrons que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} .

$\forall n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \dots + x_{n+2} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq k^{n+p-1}|x_1 - x_0| + \dots + k^n|x_1 - x_0| \\ &\leq [k^{n+p-1} + \dots + k^n]|x_1 - x_0| \\ &\leq k^n[1 + k + \dots + k^{p-1}]|x_1 - x_0| \\ &\leq k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} |x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Donc (x_n) est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} et $x_n \rightarrow x^*$.

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

PREUVE V (convergence)

Par suite, comme $x_{n+1} = g(x_n)$ et g continue, on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^* = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = g(x^*).$$

La suite (x_n) converge et sa limite est le point fixe x^* de la fonction g .

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

Corollaire (convergence point fixe)

Si g vérifie les hypothèses du théorème précédent, alors

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|, \quad \forall n \geq 1.$$

$$|x_n - \bar{x}| \leq k^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}.$$

Exercice: démonstration du corollaire, comparaison avec dichotomie.

La vitesse de convergence dépend du facteur k^n . Plus la valeur de k est petite, plus la convergence est rapide (elle peut être très lente si k est proche de 1).

Ces bornes relient la vitesse de convergence de $(x_n)_n$ à la borne k sur la dérivée de g (i.e., $|g'(x)| \leq k$).

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

PROPOSITION:

- 1 si $|g'(x^*)| < 1$ alors $(x_n)_n$ converge, x^* point attractif ;
- 2 si $|g'(x^*)| > 1$ alors $(x_n)_n$ diverge, x^* point répulsif ;
- 3 si $|g'(x^*)| = 1$ on ne peut rien dire, cas douteux.

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

- (a) Pour $g_a(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, on a $g_a(1) = 6$ et $g_a(2) = -12$, donc g_a n'est pas à valeurs dans $[1, 2]$.

De plus $g'_a(x) = 1 - 3x^2 - 8x$, donc $|g'_1(x)| > 1$ pour tout $x \in [1, 2]$.

Pas de garantie de convergence.

Exercice : Analyser la nature des points fixes des fonctions g_b, g_c, g_d et g_e .

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

En analyse numérique, l'ordre de convergence p , d'une suite $(x_n)_n$ convergente est une quantité qui représente la vitesse à laquelle la suite s'approche de sa limite.

Il est défini à partir de la comparaison de l'erreur $|x_n - x_*|$ de deux itérés successifs, i.e.,

$$\frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^p}$$

où $p > 0$.

L'intérêt pour ce quotient provient du fait qu'on peut souvent l'estimer en faisant un développement de Taylor autour de x^* de la fonction f .

Plus l'ordre de convergence est élevé, moins d'itérations sont nécessaires pour obtenir une bonne approximation.

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

DEFINITION: Ordre de convergence

Soit $e_n = x_n - x^*$. Une méthode itérative convergente est dite d'ordre p , si

$$|e_{n+1}| \simeq C|e_n|^p, \quad C > 0.$$

Exercice : Montrer que la méthode de point fixe est d'ordre $p = 1$ (TD3) et que la méthode de Newton est d'ordre $p = 2$.

1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

DÉFINITION (Vitesse de convergence)

Supposons que $(x_n)_{n=0}^\infty$ soit une suite qui converge vers x^* , avec $x_n \neq x^*$ pour tout n .

S'il existe des constantes positives C et p tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = C,$$

alors la convergence de $(x_n)_{n=0}^\infty$ vers x^* est d'ordre p , et la vitesse de convergence est C .

Une méthode itérative de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ est dite d'ordre p si la suite la converge de $(x_n)_{n=0}^\infty$ vers la solution $x^* = g(x^*)$ est d'ordre p .

- Si $p = 1$, convergence linéaire ;
- Si $p = 2$, convergence quadratique (rapide) ;
- Si $p < 1$, convergence sous-linéaire (très lent) ;
- Si $p = 1$ et $C = 0$ ou $1 < p < 2$ convergence super-linéaire.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

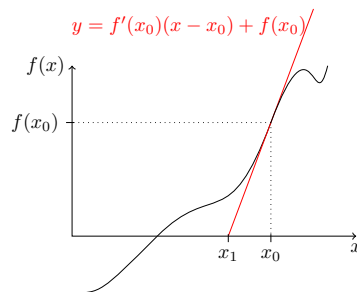
La méthode de Newton (ou de Newton-Raphson) est l'une des méthodes numériques les plus connues pour résoudre $f(x) = 0$.

Méthode de Newton I

Principe : Pour passer de x_n à x_{n+1} on écrit l'éq de la tangente au point $(x_n, f(x_n))$

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n),$$

x_{n+1} est tel que $y = 0$, $\Rightarrow f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.



1. Équations non linéaires

1.3 Méthodes itératives de type point fixe

REMARQUES

- Le calcul numérique de l'erreur peut être utilisé pour vérifier les estimations théoriques, mais aussi pour comparer la vitesse de convergence de différentes méthodes pour approcher une racine x^* de f .
- Comme on ne connaît (en général) pas x^* , on calculera en pratique l'erreur $|e_n| = |x_n - x_a^*|$ pour $n \leq n_{it} \leq N_{max}$ et $x_a^* = x^*$ si x^* est connu et x_a^* une valeur approchée de x^* aussi précise que possible (e.g., la dernière valeur de la suite calculée pour une précision donnée).
- Ordre p si $|e_n| \approx C|e_{n-1}|^p$, ou encore $\log(|e_n|) \approx \log(C) + p \log(|e_{n-1}|)$.
- Les points $(\log(|e_{n-1}|), \log(|e_n|))$ se trouvent autour d'une droite de pente p .
- Une estimation de p et de C peut-être obtenu via une régression linéaire.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Méthode de Newton II

Si $f \in C^2[a, b]$, et si $\exists x^* \in [a, b]$ (e.g. via TVI), alors un développement de Taylor de f en un point x proche de la racine x^* :

$$0 = f(x^*) = f(x) + (x^* - x)f'(x) + \frac{(x - x^*)^2}{2} f''(\xi(x)), \quad \xi(x) \in [x, x^*],$$

Si $|x - x^*|^2 = o(|x - x^*|)$ quand $x \rightarrow x^*$, alors nous faisons l'approximation :

$$0 \approx f(x) + (x^* - x)f'(x), \Leftrightarrow x^* \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Principe : étant donnée une approximation x_n , nous obtenons une approximation plus fine x_{n+1} en effectuant le calcul suivant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Géométriquement, x_{n+1} correspond au point d'intersection de la tangente à la fonction au point x_n avec l'axe des abscisses.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Algorithme 2 : Méthode de Newton

```
Input : Approximation initiale  $x_0$ ; tolérance  $\varepsilon$ ; nb max d'itérations  $N_0$ .  
Output : Solution approchée  $x$ , ou message d'échec.  
1  $i \leftarrow 1$ ;  
2 while  $i \leq N_0$  do  
3    $x \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ;  
4   if  $|x - x_0| < \varepsilon$  then  
5     // Solution trouvée  
6     return  $x$ ;  
7     Arrêter le programme;  
8   end  
9    $i \leftarrow i + 1$ ;  
10   $x_0 \leftarrow x$ ;  
11 end  
12 Afficher: "Échec après  $N_0$  itérations.";
```

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

DÉFINITION : Méthode de Newton

La méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$ repose sur l'introduction de la suite

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & n \geq 0 \end{cases}$$

REMARQUES

- La méthode de Newton est une méthode de type point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- La convergence est (sous certaines hypothèses) **quadratique**.
- Les points où $f'(\cdot) = 0$ posent problèmes (particulièrement si $f(x^*) = f'(x^*) = 0$).
- Si $(x_0 - x^*)^2 \not\ll |x_0 - x^*|$, alors x_0 n'est pas suffisamment proche de x^* , pas de garantie de convergence.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Théorème (convergence de la méthode de Newton)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2[a, b]$

Soit $x^* \in [a, b]$ tel que :

(i) $f(x^*) = 0$;

(ii) $f'(x^*) \neq 0$

Alors, $\exists \delta > 0$ tel que : si $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$, la méthode de Newton est bien définie et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

i.e., la méthode de Newton converge.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

PREUVE I

La méthode de Newton s'écrit comme

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{n+1} = g(x_n), & n \geq 0 \end{cases}$$

où $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Pour appliquer le théorème de convergence du point de fixe, il suffit de montrer que

(i) $\exists \delta > 0$ tel que $g([x^* - \delta, x^* + \delta]) \subset [x^* - \delta, x^* + \delta]$;

(ii) g est contractante sur $[x^* - \delta, x^* + \delta]$.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

PREUVE II

Pour montrer (i), on remarque que : $g'(x^*) = 0$, car

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)' = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} \end{aligned}$$

Or par hypothèse $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$, par conséquent, $g'(x^*) = \frac{f''(x^*) \times 0}{[f'(x^*)]^2} = 0$.

Puisque f est $C^2[a, b]$, on en déduit que g' est continue sur $[a, b]$.
Donc,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in [a, b], |x - x^*| \leq \delta \Rightarrow |g'(x) - g'(x^*)| &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow |g'(x)| &\leq \varepsilon (< 1) \end{aligned}$$

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

PREUVE III

De plus, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $\xi \in]x, x^*[$ tel que

$$\begin{aligned} |g(x) - x^*| &= |g(x) - g(x^*)| = |g'(\xi)| |x - x^*| \\ &\leq \varepsilon |x - x^*| \\ &< |x - x^*| \\ |g(x) - x^*| &\leq \delta \end{aligned}$$

i.e., Si $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$, alors $g(x) \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$,

$$g([x^* - \delta, x^* + \delta]) \subset [x^* - \delta, x^* + \delta]$$

Pour monter (ii), il suffit de remarquer que $|g'(x)| \leq \varepsilon < 1$ sur $[x^* - \delta, x^* + \delta]$.

Donc g est contractante sur $[x^* - \delta, x^* + \delta]$.

En conclusion, d'après le théorème du point fixe, on en déduit que si $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

REMARQUES

- Le théorème est intéressant, mais assez inutile à des fins pratiques.
- En pratique : choisissez une valeur de départ x_0 , itérez quelques étapes. Soit les itérations convergent rapidement vers la racine, soit il sera clair que la convergence est peu probable.
- La principale faiblesse de la méthode de Newton réside dans la nécessité de calculer la dérivée, $f'(x_n)$, à chaque itération.
- Bien souvent, $f'(x_n)$ est beaucoup plus difficile à calculer et nécessite plus d'opérations arithmétiques pour être calculée que $f(x_n)$.
- Une variante de la méthode consiste à approcher la dérivée.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Méthode de la sécante

Principe : approcher la dérivée par un taux d'accroissement. Par définition

$$f'(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}.$$

Soit $x = x_{n-1}$,

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}.$$

En remplaçant cette approximation dans la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

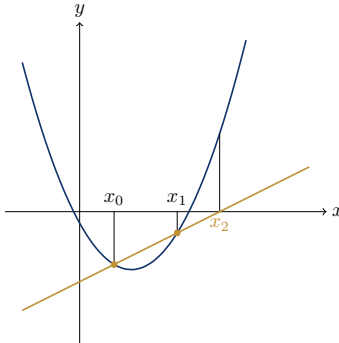
1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Méthode de la sécante

La méthode de la sécante s'écrit comme

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ donnés} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$



1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Il est également possible d'utiliser les méthodes de type point fixe pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires.

On s'intéresse en particulier à l'extension (informelle) de la méthode de Newton pour des fonctions de la forme :

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto f(x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix}$$

Si on utilise la notation vectorielle $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$ pour représenter les variables et $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$ pour le second membre, le système, à k équations et k inconnues, à résoudre s'écrit

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

REMARQUES

- La méthode de Newton ou la méthode de la sécante peuvent être utilisées pour affiner une approximation obtenue par la méthode de dichotomie, car ces méthodes nécessitent une bonne première approximation mais donnent généralement une convergence rapide.
- Chaque paire successive d'approximations dans la méthode de dichotomie encadre une racine x^* , i.e., pour tout $n \in \mathbb{Z}$, x^* est compris entre a_n et b_n , ce qui implique

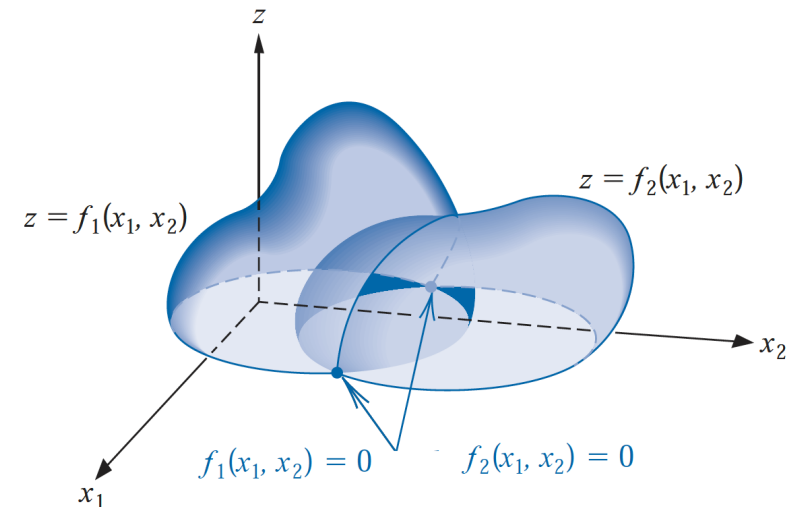
$$|x_n - x^*| < \frac{1}{2} |a_n - b_n|,$$

et fournit un contrôle de l'erreur facile à calculer.

- Ce type d'encadrement de la racine n'est garanti ni pour la méthode de Newton ni pour la méthode de la sécante.
- La méthode de la **fausse position** (ou **regula falsi**) génère des approximations de la même manière que la méthode de la sécante, mais elle inclut un test pour garantir que la racine est toujours encadrée entre les itérations successives.

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton



1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

EXEMPLE

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x_1) - x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Calculons $J_f(x_1, x_2)$, la matrice jacobienne de f en (x_1, x_2) , i.e.

$$[J_f(x_1, x_2)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

$$[J_f(x_1, x_2)]_{11} = \frac{df_1}{dx_1} = \exp(x_1), \quad [J_f(x_1, x_2)]_{12} = \frac{df_1}{dx_2} = -1$$

$$[J_f(x_1, x_2)]_{21} = \frac{df_2}{dx_1} = 2x_1, \quad [J_f(x_1, x_2)]_{22} = \frac{df_2}{dx_2} = -2x_2$$

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Méthode de Newton pour les systèmes d'équations non linéaires

Principe :

1 On se donne une première approximation $x_0 \in \mathbb{R}^k$ de x^* ($|x_0 - x^*|$ petit).

2 On fait un développement de Taylor de la fonction f autour de x_0

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + J_f(x_0)h + O(\|h\|^2)$$

où $h \in \mathbb{R}^k$ et $J_f(x_0)$ est la matrice jacobienne de f en x_0 .

3 On veut calculer h tq : $x_0 + h = x^*$.

4 Pour cela on néglige les termes d'ordre supérieur et on obtient

$$0 \approx f(x_0) + J_f(x_0)h$$

5 Si $J_f(x_0)$ est inversible,

$$h \approx -[J_f(x_0)]^{-1}f(x_0)$$

et $x_1 = x_0 + h$.

6 On calcule la "correction" h_1 pour x_1 , i.e., $x_2 = x_1 + h_1$,...

1. Équations non linéaires

1.4 La méthode de Newton

Méthode de Newton

La suite des itérés successifs est définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^k & \text{donné} \\ x_{n+1} = x_n - [J_f(x_n)]^{-1}f(x_n), & n \geq 0, \end{cases}$$

où $J_f(x_n)$ est la matrice (de taille $k \times k$) jacobienne de f en x_n .

REMARQUE

Dans la pratique, le calcul du vecteur $J_f(x_n)^{-1}f(x_n)$ est très coûteux si k est grand (calcul de l'inverse de la matrice jacobienne à chaque itération).

Il est donc généralement remplacé par la résolution du système linéaire

$$J_f(x_n)z_n = f(x_n)$$

où $z_n = J_f(x_n)^{-1}f(x_n)$.