

Méthodes Numériques

L2 MIASHS

Fabien Navarro

E-mail: fabien.navarro@univ-paris1.fr



2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

1 2.1 Introduction

2 2.2 La méthode de Gauss

3 2.3 Méthodes de factorisation : LU

4 2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

1 2.1 Introduction

2 2.2 La méthode de Gauss

3 2.3 Méthodes de factorisation : LU

4 2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Introduction

- Les méthodes de points fixes s'appliquent dans le cadre de la résolution de systèmes d'équations non linéaires.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Introduction

- Les méthodes de points fixes s'appliquent dans le cadre de la résolution de systèmes d'équations non linéaires.
- Les algorithmes résultants nécessitent d'inverser une matrice à chaque itération.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Introduction

- Les méthodes de points fixes s'appliquent dans le cadre de la résolution de systèmes d'équations non linéaires.
- Les algorithmes résultants nécessitent d'inverser une matrice à chaque itération.
- Cette inversion est généralement remplacée par la résolution d'un système linéaire.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Introduction

- Les méthodes de points fixes s'appliquent dans le cadre de la résolution de systèmes d'équations non linéaires.
- Les algorithmes résultants nécessitent d'inverser une matrice à chaque itération.
- Cette inversion est généralement remplacée par la résolution d'un système linéaire.
- Deux familles de méthodes peuvent être envisagées : **directes** ou **itératives**.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Introduction

- Les méthodes de points fixes s'appliquent dans le cadre de la résolution de systèmes d'équations non linéaires.
- Les algorithmes résultants nécessitent d'inverser une matrice à chaque itération.
- Cette inversion est généralement remplacée par la résolution d'un système linéaire.
- Deux familles de méthodes peuvent être envisagées : **directes** ou **itératives**.
- La résolution de tels systèmes intervient dans de nombreux problèmes d'ingénierie et de science, ainsi que dans les applications des mathématiques aux sciences sociales et à l'étude quantitative des problèmes économiques.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXAMPLE (Régression linéaire multiple)

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

où

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

avec $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, X est une matrice $n \times (p+1)$, $\beta \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXAMPLE (Régression linéaire multiple)

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

où

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

avec $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, X est une matrice $n \times (p+1)$, $\beta \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires de $\vec{\beta}$

$$\hat{\vec{\beta}} = \arg \min_{\vec{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} \|\vec{y} - X\vec{\beta}\|^2,$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXAMPLE (Régression linéaire multiple)

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

où

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

avec $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, X est une matrice $n \times (p+1)$, $\beta \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires de $\vec{\beta}$

$$\hat{\vec{\beta}} = \arg \min_{\vec{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} \|\vec{y} - X\vec{\beta}\|^2,$$

il est solution des équations normales :

$$X^T X \vec{\beta} = X^T \vec{y},$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXAMPLE (Régression linéaire multiple)

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

où

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

avec $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, X est une matrice $n \times (p+1)$, $\beta \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires de $\vec{\beta}$

$$\hat{\vec{\beta}} = \arg \min_{\vec{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} \|\vec{y} - X\vec{\beta}\|^2,$$

il est solution des équations normales :

$$X^T X \vec{\beta} = X^T \vec{y},$$

un système linéaire de la forme $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

But

On considère des méthodes directes pour résoudre des systèmes linéaires : $A\vec{x} = \vec{b}$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

But

On considère des **méthodes directes** pour résoudre des **systèmes linéaires** : $A\vec{x} = \vec{b}$

Par techniques directes, on désigne toute méthode qui permet d'obtenir la solution en **un nombre fini de manipulations**.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

But

On considère des **méthodes directes** pour résoudre des **systèmes linéaires** : $A\vec{x} = \vec{b}$

Par techniques directes, on désigne toute méthode qui permet d'obtenir la solution en **un nombre fini de manipulations**.

i.e., Trouver \vec{x} tel que $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

But

On considère des **méthodes directes** pour résoudre des **systèmes linéaires** : $A\vec{x} = \vec{b}$

Par techniques directes, on désigne toute méthode qui permet d'obtenir la solution en **un nombre fini de manipulations**.

i.e., Trouver \vec{x} tel que $A\vec{x} = \vec{b}$.

Approche

Transformer le problème initial $A\vec{x} = \vec{b}$ en un problème équivalent faisant intervenir une (ou plusieurs) matrice(s) triangulaire(s) (inférieur et/ou supérieur).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

But

On considère des **méthodes directes** pour résoudre des **systèmes linéaires** : $A\vec{x} = \vec{b}$

Par techniques directes, on désigne toute méthode qui permet d'obtenir la solution en **un nombre fini de manipulations**.

i.e., Trouver \vec{x} tel que $A\vec{x} = \vec{b}$.

Approche

Transformer le problème initial $A\vec{x} = \vec{b}$ en un problème équivalent faisant intervenir une (ou plusieurs) matrice(s) triangulaire(s) (inférieur et/ou supérieur).

Outils

L'**élimination de Gauss** est le principal ingrédient pour la résolution directe des systèmes d'équations linéaires.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

On considère des méthodes directes pour résoudre un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, & (L_2) \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, & (L_n) \end{cases} \quad (1)$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

On considère des méthodes directes pour résoudre un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, & (L_2) \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, & (L_n) \end{cases} \quad (1)$$

Nous utilisons trois opérations élémentaires pour simplifier le système linéaire, en un autre plus facile à résoudre, conservant les mêmes solutions.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

On considère des méthodes directes pour résoudre un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, & (L_2) \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, & (L_n) \end{cases} \quad (1)$$

Nous utilisons trois opérations élémentaires pour simplifier le système linéaire, en un autre plus facile à résoudre, conservant les mêmes solutions.

1 Multiplication de L_i par une constante non nulle λ : $(\lambda L_i) \rightarrow (L_i)$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

On considère des méthodes directes pour résoudre un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, & (L_2) \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, & (L_n) \end{cases} \quad (1)$$

Nous utilisons trois opérations élémentaires pour simplifier le système linéaire, en un autre plus facile à résoudre, conservant les mêmes solutions.

- 1 Multiplication de L_i par une constante non nulle λ : $(\lambda L_i) \rightarrow (L_i)$.
- 2 Combinaison linéaire de L_i et L_j : $(L_i + \lambda L_j) \rightarrow (L_i)$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

On considère des méthodes directes pour résoudre un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, & (L_2) \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, & (L_n) \end{cases} \quad (1)$$

Nous utilisons trois opérations élémentaires pour simplifier le système linéaire, en un autre plus facile à résoudre, conservant les mêmes solutions.

- 1 Multiplication de L_i par une constante non nulle λ : $(\lambda L_i) \rightarrow (L_i)$.
- 2 Combinaison linéaire de L_i et L_j : $(L_i + \lambda L_j) \rightarrow (L_i)$.
- 3 Substitution de L_i et L_j : $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

NOTATIONS

1 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

NOTATIONS

1 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

NOTATIONS

1 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

3 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Le système d'équations linéaires (1) se réécrit sous forme matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Le système d'équations linéaires (1) se réécrit sous forme matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

L'ensemble des solutions satisfait l'une des conditions suivantes :

- 1 Le système a une solution unique.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Le système d'équations linéaires (1) se réécrit sous forme matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

L'ensemble des solutions satisfait l'une des conditions suivantes :

- 1 Le système a une solution unique.
- 2 Le système a une infinité de solutions.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Le système d'équations linéaires (1) se réécrit sous forme matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

L'ensemble des solutions satisfait l'une des conditions suivantes :

- 1 Le système a une solution unique.
- 2 Le système a une infinité de solutions.
- 3 Le système n'a pas de solution.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Le système d'équations linéaires (1) se réécrit sous forme matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

L'ensemble des solutions satisfait l'une des conditions suivantes :

- 1 Le système a une solution unique.
- 2 Le système a une infinité de solutions.
- 3 Le système n'a pas de solution.

Le système a une solution unique si et seulement si

$$\det(A) \neq 0,$$

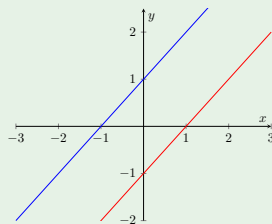
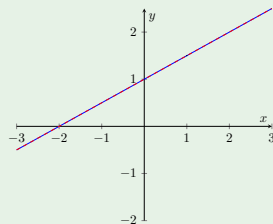
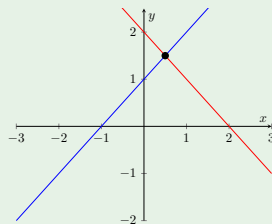
ou de manière équivalente, A est inversible.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

DEFINITION

Une matrice A est dite triangulaire supérieure, respectivement inférieure

1 si $a_{ij} = 0$, pour $1 \leq j < i \leq n$ (Tri. sup.) ;

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

DEFINITION

Une matrice A est dite triangulaire supérieure, respectivement inférieure

- 1 si $a_{ij} = 0$, pour $1 \leq j < i \leq n$ (Tri. sup.) ;
- 2 si $a_{ij} = 0$, pour $1 \leq i < j \leq n$ (Tri. inf.).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

DEFINITION

Une matrice A est dite triangulaire supérieure, respectivement inférieure

1 si $a_{ij} = 0$, pour $1 \leq j < i \leq n$ (Tri. sup.) ;

2 si $a_{ij} = 0$, pour $1 \leq i < j \leq n$ (Tri. inf.).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

REMARQUE

Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$, lorsque A est triangulaire (sup ou inf) est immédiat !

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

REMARQUE

Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$, lorsque A est triangulaire (sup ou inf) est immédiat !

En effet,

1 A Tri. sup (Remonter) :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},$$

pour $i = n - 1$ à 1,

$$x_i = \frac{b_i - a_{ii+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n}{a_{ii}} = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

REMARQUE

Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$, lorsque A est triangulaire (sup ou inf) est immédiat !

En effet,

1 A Tri. sup (Remonter) :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},$$

pour $i = n - 1$ à 1 ,

$$x_i = \frac{b_i - a_{ii+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n}{a_{ii}} = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}.$$

2 A Tri. inf (Descente) :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

pour $i = 2$ à n ,

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{1}{-1} = -1$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{1 - 1/2(-1)}{1/2} = 3$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{1 - 1/2(-1)}{1/2} = 3$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{8 - 1 \times 3 - (-1)(-1)}{2} = 2$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.1 Introduction

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{1 - 1/2(-1)}{1/2} = 3$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{8 - 1 \times 3 - (-1)(-1)}{2} = 2$$

```
A <- matrix(c(2, 1, -1, 0, 1/2, 1/2,
              0, 0, -1), ncol = 3, byrow = T)
b <- c(8, 1, 1)
solve(A,b)
```

```
## [1] 2 3 -1
```

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

1 2.1 Introduction

2 2.2 La méthode de Gauss

3 2.3 Méthodes de factorisation : LU

4 2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

La méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à partir d'un système $A\vec{x} = \vec{b}$, puis, à l'aide de manipulations élémentaires, définir un système équivalent :

$$\tilde{A}\vec{y} = \tilde{\vec{b}},$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

La méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à partir d'un système $A\vec{x} = \vec{b}$, puis, à l'aide de manipulations élémentaires, définir un système équivalent :

$$\tilde{A}\vec{y} = \tilde{\vec{b}},$$

de sorte que

$$\vec{x} = \vec{y},$$

avec \tilde{A} une matrice triangulaire.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Algorithme de Gauss I

1 Étape 1 : on pose $A^{(1)} = A$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Algorithme de Gauss I

- 1 Étape 1 : on pose $A^{(1)} = A$.
- 2 Étape k : on appelle $A^{(k)}$ la matrice à l'étape k .

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & a_{ik}^{(k)} & & & \\ \vdots & & & 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

L'étape k , consiste à éliminer la colonne k .

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Algorithme de Gauss II (étape k)

Pour $i = k + 1$ à n faire

Début

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Algorithme de Gauss II (étape k)

Pour $i = k + 1$ à n faire

Début

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Remplacer la ligne i :

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} \times L_k$$

Fin

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$A = \left(\begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & -1 & L_1 \\ -3 & -1 & 2 & L_2 \\ -2 & 1 & 2 & L_3 \end{array} \right)$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$A = \left(\begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & -1 & L_1 \\ -3 & -1 & 2 & L_2 \\ -2 & 1 & 2 & L_3 \end{array} \right)$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{3}{2}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & L_1 \\ -3 & -1 & 2 & L_2 \\ -2 & 1 & 2 & L_3 \end{array} \right)$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{3}{2}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = L_2 + \frac{3}{2}L_1$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \boxed{-3} & -1 & 2 \\ \boxed{-2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{3}{2}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = L_2 + \frac{3}{2}L_1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-2}{2} = -1$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{3}{2}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = L_2 + \frac{3}{2}L_1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 = L_3 + L_1$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$A = \left(\begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & -1 & L_1 \\ -3 & -1 & 2 & L_2 \\ -2 & 1 & 2 & L_3 \end{array} \right)$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{3}{2}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = L_2 + \frac{3}{2}L_1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 = L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & -1 & L_1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ 0 & 2 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right)$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2 = L_3 - 4L_2$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2 = L_3 - 4L_2$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

L'algorithme d'élimination de Gauss pour obtenir un système échelonné peut s'écrire :

Algorithme 1 : Méthode de Gauss

Entrées : A, \vec{b} ;

Sorties : $\tilde{A}, \tilde{\vec{b}}$;

1 **Initialisation;**

2 $A^{(1)} \leftarrow A$;

3 $\vec{b}^{(1)} \leftarrow \vec{b}$;

4 **pour** $k = 1$ **à** $n - 1$ **faire**

5 **pour** $i = k + 1$ **à** n **faire**

6 $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$; // (n-k) \otimes

7 **pour** $j = k$ **à** n **faire**

8 $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik}a_{kj}$; // (n-k) (n-k+1) \otimes et \ominus

9 **fin**

10 $b_i = b_i - m_{ik}b_k$;

11 **fin**

12 **fin**

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

REMARQUE

- En sortie, et sous réserve que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on obtient un système triangulaire supérieur dont la solution est la même que celle de $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

REMARQUE

- En sortie, et sous réserve que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on obtient un système triangulaire supérieur dont la solution est la même que celle de $A\vec{x} = \vec{b}$.
- La méthode fonctionne tant que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on a $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, i.e., les pivots sont non nuls.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

REMARQUE

- En sortie, et sous réserve que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on obtient un système triangulaire supérieur dont la solution est la même que celle de $A\vec{x} = \vec{b}$.
- La méthode fonctionne tant que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on a $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, i.e., les pivots sont non nuls.

Question : Quelles sont les conditions sur la matrice A pour avoir $a_{kk}^{(k)} \neq 0$?

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

DEFINITION

Une matrice A_k est dite **sous matrice principale d'ordre k** si

1 $A_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$: matrice d'ordre k .

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

DEFINITION

Une matrice A_k est dite **sous matrice principale d'ordre k** si

1 $A_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$: matrice d'ordre k .

2 L'élément ij de A_k est défini par

$$(A_k)_{ij} = a_{ij}, \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

DEFINITION

Une matrice A_k est dite **sous matrice principale d'ordre k** si

1 $A_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$: matrice d'ordre k .

2 L'élément ij de A_k est défini par

$$(A_k)_{ij} = a_{ij}, \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = A.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Théorème 1

(i) Si toutes les sous-matrices principales A_k de la matrice A sont **inversibles**,

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Théorème 1

- (i) Si toutes les sous-matrices principales A_k de la matrice A sont **inversibles**, alors, tous les pivots principaux $a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Théorème 1

- (i) Si toutes les sous-matrices principales A_k de la matrice A sont **inversibles**, alors, tous les pivots principaux $a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls.
- (ii) Si tous les pivots principaux sont non nuls,

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Théorème 1

- (i) Si toutes les sous-matrices principales A_k de la matrice A sont **inversibles**, alors, tous les pivots principaux $a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls.
- (ii) Si tous les pivots principaux sont non nuls, alors, toutes les sous-matrices A_k sont **inversibles**.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Preuve (Théorème 1)

On note par $A^{(k)}$ la matrice obtenue à la k -ième étape des manipulations de Gauss et on note par $A_i^{(k)}$ la sous-matrice d'ordre i de A_k .

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Preuve (Théorème 1)

On note par $A^{(k)}$ la matrice obtenue à la k -ième étape des manipulations de Gauss et on note par $A_i^{(k)}$ la sous-matrice d'ordre i de A_k .

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Vu la structure des manipulations de Gauss, on a, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(A_k) = \det(A_k^{(k)}) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{kk}^{(k)} = \prod_{j=1}^k a_{jj}^{(j)}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Preuve (Théorème 1)

On note par $A^{(k)}$ la matrice obtenue à la k -ième étape des manipulations de Gauss et on note par $A_i^{(k)}$ la sous-matrice d'ordre i de A_k .

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Vu la structure des manipulations de Gauss, on a, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(A_k) = \det(A_k^{(k)}) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{kk}^{(k)} = \prod_{j=1}^k a_{jj}^{(j)}.$$

Par suite, $\det(A_k) \neq 0 \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n, \quad a_{jj}^{(j)} \neq 0$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Preuve (Théorème 1)

On note par $A^{(k)}$ la matrice obtenue à la k -ième étape des manipulations de Gauss et on note par $A_i^{(k)}$ la sous-matrice d'ordre i de A_k .

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Vu la structure des manipulations de Gauss, on a, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(A_k) = \det(A_k^{(k)}) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{kk}^{(k)} = \prod_{j=1}^k a_{jj}^{(j)}.$$

Par suite, $\det(A_k) \neq 0 \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n, \quad a_{jj}^{(j)} \neq 0$.

En conclusion, la procédure de Gauss fonctionne ssi $\det(A_k) \neq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss I

On note N_{MD} le nombre de multiplications et de divisions intervenant dans l'algorithme et N_S le nombre de soustractions.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss I

On note N_{MD} le nombre de multiplications et de divisions intervenant dans l'algorithme et N_S le nombre de soustractions.

Pour chaque valeur de k ,

- m_{ik} fait intervenir $n - k$ divisions.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss I

On note N_{MD} le nombre de multiplications et de divisions intervenant dans l'algorithme et N_S le nombre de soustractions.

Pour chaque valeur de k ,

- m_{ik} fait intervenir $n - k$ divisions.
- $a_{ij} - m_{ik}a_{kj}$, $(n - k)(n - k + 1)$ multiplications, $(n - k)(n - k + 1)$ soustractions.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss I

On note N_{MD} le nombre de multiplications et de divisions intervenant dans l'algorithme et N_S le nombre de soustractions.

Pour chaque valeur de k ,

- m_{ik} fait intervenir $n - k$ divisions.
- $a_{ij} - m_{ik}a_{kj}$, $(n - k)(n - k + 1)$ multiplications, $(n - k)(n - k + 1)$ soustractions.

On a donc

$$N_{MD} = \sum_{k=1}^{n-1} ((n - k) + (n - k)(n - k + 1)),$$
$$N_S = \sum_{k=1}^{n-1} ((n - k)(n - k + 1)).$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss II

$$N_{MD} = \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + (n-k)(n-k+1)]$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss II

$$\begin{aligned} N_{MD} &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + (n-k)(n-k+1)] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+2)] \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss II

$$\begin{aligned}N_{MD} &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + (n-k)(n-k+1)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+2)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [n^2 - 2nk + k^2 + 2n - 2k]\end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss II

$$\begin{aligned}N_{MD} &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + (n-k)(n-k+1)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+2)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [n^2 - 2nk + k^2 + 2n - 2k] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss II

$$\begin{aligned}N_{MD} &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + (n-k)(n-k+1)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+2)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [n^2 - 2nk + k^2 + 2n - 2k] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \\&= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k\end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss III

$$N_S = \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+1)]$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss III

$$\begin{aligned} N_S &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+1)] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} [n^2 - 2nk + k^2 + n - k] \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss III

$$\begin{aligned}N_S &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+1)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [n^2 - 2nk + k^2 + n - k] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss III

$$\begin{aligned}N_S &= \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k)(n-k+1)] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} [n^2 - 2nk + k^2 + n - k] \\&= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \\&= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k\end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss IV

Or,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} = \frac{(n - 1)n}{2},$$

.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss IV

Or,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} = \frac{(n - 1)n}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n - 1)(n - 1 + 1)(2(n - 1) + 1)}{6} = \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss IV

Or,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

En résumé,

$$N_{MD} = \frac{2n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6},$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss IV

Or,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

En résumé,

$$N_{MD} = \frac{2n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6},$$

$$N_S = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n}{3}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

Nombre d'opérations dans l'algorithme de Gauss IV

Or,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

En résumé,

$$N_{MD} = \frac{2n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6},$$

$$N_S = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Pour n grand, le nombre total de multiplications et de divisions dans le principe d'élimination de Gauss est d'environ $n^3/3$, tout comme le nombre total d'additions et de soustractions (cette complexité arithmétique est la même dans le cas de la résolution d'un système).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

La quantité de calcul et le temps nécessaire augmentent avec n proportionnellement à n^3 :

n	N_{MD}	N_S
3	11	8
10	375	330
50	42875	41650
100	338250	333300
1000	3.3×10^8	3.3×10^8

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE

La quantité de calcul et le temps nécessaire augmentent avec n proportionnellement à n^3 :

n	N_{MD}	N_S
3	11	8
10	375	330
50	42875	41650
100	338250	333300
1000	3.3×10^8	3.3×10^8

REMARQUE

- En général, le temps nécessaire pour effectuer une multiplication ou une division sur un ordinateur est approximativement le même et est considérablement plus grand que celui nécessaire pour effectuer une addition ou une soustraction.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

1 2.1 Introduction

2 2.2 La méthode de Gauss

3 2.3 Méthodes de factorisation : LU

4 2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Motivation

Vu complexité de la méthode de Gauss, d'autres méthodes ont été développées.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Motivation

Vu complexité de la méthode de Gauss, d'autres méthodes ont été développées.

Principe

Factoriser la matrice A de départ sous la forme : $A = LU$, avec

- 1 L : matrice triangulaire inférieure ;

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Motivation

Vu complexité de la méthode de Gauss, d'autres méthodes ont été développées.

Principe

Factoriser la matrice A de départ sous la forme : $A = LU$, avec

- 1 L : matrice triangulaire inférieure ;
- 2 U : matrice triangulaire supérieure.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Motivation

Vu complexité de la méthode de Gauss, d'autres méthodes ont été développées.

Principe

Factoriser la matrice A de départ sous la forme : $A = LU$, avec

- 1 L : matrice triangulaire inférieure ;
- 2 U : matrice triangulaire supérieure.

Utilité

Le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalent à $LU\vec{x} = \vec{b}$, et la résolution se fait en deux étapes :

- 1 on pose $U\vec{x} = \vec{y}$ et on résout $L\vec{y} = \vec{b}$, puis

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Motivation

Vu complexité de la méthode de Gauss, d'autres méthodes ont été développées.

Principe

Factoriser la matrice A de départ sous la forme : $A = LU$, avec

- 1 L : matrice triangulaire inférieure ;
- 2 U : matrice triangulaire supérieure.

Utilité

Le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalent à $LU\vec{x} = \vec{b}$, et la résolution se fait en deux étapes :

- 1 on pose $U\vec{x} = \vec{y}$ et on résout $L\vec{y} = \vec{b}$, puis
- 2 on résout $U\vec{x} = \vec{y}$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Motivation

Vu complexité de la méthode de Gauss, d'autres méthodes ont été développées.

Principe

Factoriser la matrice A de départ sous la forme : $A = LU$, avec

- 1 L : matrice triangulaire inférieure ;
- 2 U : matrice triangulaire supérieure.

Utilité

Le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalent à $LU\vec{x} = \vec{b}$, et la résolution se fait en deux étapes :

- 1 on pose $U\vec{x} = \vec{y}$ et on résout $L\vec{y} = \vec{b}$, puis
- 2 on résout $U\vec{x} = \vec{y}$.

i.e., la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ revient à résoudre deux systèmes triangulaires (le 1^{er} est inférieur et le suivant supérieur).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- La résolution d'un système triangulaire supérieur ou inférieur nécessite un nombre d'opérations $O(n^2)$ chacun.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- La résolution d'un système triangulaire supérieur ou inférieur nécessite un nombre d'opérations $O(n^2)$ chacun.

Exercice : calculer ce nombre (TD4) et déduire le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- La résolution d'un système triangulaire supérieur ou inférieur nécessite un nombre d'opérations $O(n^2)$ chacun.

Exercice : calculer ce nombre (TD4) et déduire le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss.

EXEMPLE

Comparaison du nombre approximatif d'opérations nécessaires à la détermination de la solution d'un système linéaire en utilisant Gauss vs LU.

n	$n^3/3$	$2n^2$	%Réduction
10	3.3×10^2	2×10^2	40
100	3.3×10^5	2×10^4	94
1000	3.3×10^8	2×10^6	99.4
10000	3.3×10^{11}	2×10^8	99.9

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- Comme le montre l'exemple, le facteur de réduction augmente considérablement avec la taille de la matrice.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- Comme le montre l'exemple, le facteur de réduction augmente considérablement avec la taille de la matrice.
- Sans surprise, les réductions obtenues par la factorisation ont un coût ; la détermination des matrices L et U nécessitent $O(n^3/3)$ opérations.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- Comme le montre l'exemple, le facteur de réduction augmente considérablement avec la taille de la matrice.
- Sans surprise, les réductions obtenues par la factorisation ont un coût ; la détermination des matrices L et U nécessitent $O(n^3/3)$ opérations.
- Mais une fois la factorisation déterminée, les systèmes impliquant la matrice A peuvent être résolus pour un nombre quelconque de vecteurs b .

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- Comme le montre l'exemple, le facteur de réduction augmente considérablement avec la taille de la matrice.
- Sans surprise, les réductions obtenues par la factorisation ont un coût ; la détermination des matrices L et U nécessitent $O(n^3/3)$ opérations.
- Mais une fois la factorisation déterminée, les systèmes impliquant la matrice A peuvent être résolus pour un nombre quelconque de vecteurs b .

Question : Quelles sont les conditions sur A pour pouvoir la factoriser sous la forme $A = LU$?

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

- Comme le montre l'exemple, le facteur de réduction augmente considérablement avec la taille de la matrice.
- Sans surprise, les réductions obtenues par la factorisation ont un coût ; la détermination des matrices L et U nécessitent $O(n^3/3)$ opérations.
- Mais une fois la factorisation déterminée, les systèmes impliquant la matrice A peuvent être résolus pour un nombre quelconque de vecteurs b .

Question : Quelles sont les conditions sur A pour pouvoir la factoriser sous la forme $A = LU$?

Pour répondre à cette question, on revient sur l'algorithme de Gauss (en supposant qu'il peut s'appliquer au système $A\vec{x} = \vec{b}$).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- La première étape ($k = 1$) du processus d'élimination de Gauss consiste à réaliser, pour chaque $i = 2, \dots, n$ les opérations

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i1} \times L_1$$

où $m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- La première étape ($k = 1$) du processus d'élimination de Gauss consiste à réaliser, pour chaque $i = 2, \dots, n$ les opérations

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i1} \times L_1$$

où $m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$.

- Ces opérations transforment le système en un système dans lequel toutes les entrées de la première colonne sous la diagonale sont nulles.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- La première étape ($k = 1$) du processus d'élimination de Gauss consiste à réaliser, pour chaque $i = 2, \dots, n$ les opérations

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i1} \times L_1$$

où $m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$.

- Ces opérations transforment le système en un système dans lequel toutes les entrées de la première colonne sous la diagonale sont nulles.
- On peut le reformuler d'une autre manière. Il est obtenu en multipliant la matrice originale A , à gauche, par la matrice $M^{(1)}$ (i.e, $A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)} = M^{(1)} A$) :

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE I

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE I

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE I

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A1 <- matrix(c(2,-3,-2,1,-1,1,-1,2,2),ncol = 3)
M1 <- diag(3)
M1[2,1] <- 3/2
M1[3,1] <- 1
M1%*%A1
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2  1.0 -1.0
## [2,]    0  0.5  0.5
## [3,]    0  2.0  1.0
```

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

Le passage de l'étape k à l'étape $k + 1$ peut s'interpréter de la même manière :

- on pose,

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

Le passage de l'étape k à l'étape $k + 1$ peut s'interpréter de la même manière :

- on pose,

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

- on introduit la matrice

$$M^{(k)} = \begin{cases} M_{ii}^{(k)} = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ M_{ik}^{(k)} = -m_{ik} & \forall k \in \{k + 1, \dots, n\} \\ M_{ij}^{(k)} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

Le passage de l'étape k à l'étape $k + 1$ peut s'interpréter de la même manière :

- on pose,

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

- on introduit la matrice

$$M^{(k)} = \begin{cases} M_{ii}^{(k)} = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ M_{ik}^{(k)} = -m_{ik} & \forall k \in \{k + 1, \dots, n\} \\ M_{ij}^{(k)} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Alors on a, $\forall k \in \{1, \dots, n - 1\}$:

$$A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)},$$

où $M^{(k)}$ génère les opérations sur lignes

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} \times L_k, \quad \text{pour } i = k + 1, \dots, n.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

En général, avec $A^{(k)}\vec{x} = \vec{b}^{(k)}$ déjà formé, la multiplication par la k -ième matrice de transformation de Gauss $M^{(k)}$, nous donne

$$A^{(k+1)}\vec{x} = M^{(k)}A^{(k)}\vec{x} = M^{(k)} \dots M^{(1)}Ax = M^{(k)}\vec{b}^{(k)} = \vec{b}^{(k+1)} = M^{(k)} \dots M^{(1)}\vec{b}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

En général, avec $A^{(k)}\vec{x} = \vec{b}^{(k)}$ déjà formé, la multiplication par la k -ième matrice de transformation de Gauss $M^{(k)}$, nous donne

$$A^{(k+1)}\vec{x} = M^{(k)}A^{(k)}\vec{x} = M^{(k)} \dots M^{(1)}Ax = M^{(k)}\vec{b}^{(k)} = \vec{b}^{(k+1)} = M^{(k)} \dots M^{(1)}\vec{b}.$$

Le processus se termine avec la formation de $A^{(n)}\vec{x} = \vec{b}^{(n)}$, où $A^{(n)}$ est la matrice triangulaire supérieure:

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix},$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

En général, avec $A^{(k)}\vec{x} = \vec{b}^{(k)}$ déjà formé, la multiplication par la k -ième matrice de transformation de Gauss $M^{(k)}$, nous donne

$$A^{(k+1)}\vec{x} = M^{(k)}A^{(k)}\vec{x} = M^{(k)} \dots M^{(1)}Ax = M^{(k)}\vec{b}^{(k)} = \vec{b}^{(k+1)} = M^{(k)} \dots M^{(1)}\vec{b}.$$

Le processus se termine avec la formation de $A^{(n)}\vec{x} = \vec{b}^{(n)}$, où $A^{(n)}$ est la matrice triangulaire supérieure:

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix},$$

i.e.

$$A^{(n)} = M^{(n-1)}M^{(n-2)} \dots M^{(1)}A.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

En général, avec $A^{(k)}\vec{x} = \vec{b}^{(k)}$ déjà formé, la multiplication par la k -ième matrice de transformation de Gauss $M^{(k)}$, nous donne

$$A^{(k+1)}\vec{x} = M^{(k)}A^{(k)}\vec{x} = M^{(k)} \dots M^{(1)}Ax = M^{(k)}\vec{b}^{(k)} = \vec{b}^{(k+1)} = M^{(k)} \dots M^{(1)}\vec{b}.$$

Le processus se termine avec la formation de $A^{(n)}\vec{x} = \vec{b}^{(n)}$, où $A^{(n)}$ est la matrice triangulaire supérieure:

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix},$$

i.e.

$$A^{(n)} = M^{(n-1)}M^{(n-2)} \dots M^{(1)}A.$$

Cette procédure génère la matrice $U = A^{(n)}$ de la factorisation matricielle $A = LU$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE II

$$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \quad \leftarrow L_3 - 4L_2$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE II

$$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$A^{(3)} = M^{(2)} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.2 La méthode de Gauss

EXEMPLE II

$$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$A^{(3)} = M^{(2)} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

$$U\vec{x} = A^{(3)}\vec{x} = M^{(2)}A^{(2)}\vec{x} = M^{(2)}M^{(1)}A\vec{x} = M^{(2)}M^{(1)}\vec{b} = \vec{b}^{(3)}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- Ainsi, la matrice triangulaire supérieure U de la décomposition LU est donnée par

$$U = A^{(n)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)} A.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- Ainsi, la matrice triangulaire supérieure U de la décomposition LU est donnée par

$$U = A^{(n)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)} A.$$

- Pour inverser les effets de cette transformation et revenir à $A^{(k)}$, on effectue, pour $i = k + 1, \dots, n$, les opérations

$$L_i \leftarrow L_i + m_{ik} \times L_k.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- Ainsi, la matrice triangulaire supérieure U de la décomposition LU est donnée par

$$U = A^{(n)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)} A.$$

- Pour inverser les effets de cette transformation et revenir à $A^{(k)}$, on effectue, pour $i = k + 1, \dots, n$, les opérations

$$L_i \leftarrow L_i + m_{ik} \times L_k.$$

- Ceci est équivalent à multiplier par l'inverse de la matrice $M^{(k)}$, i.e.,

$$L^{(k)} = [M^{(k)}]^{-1} = \begin{cases} L_{ii}^{(k)} = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ L_{ik}^{(k)} = +m_{ik} & \forall k \in \{k + 1, \dots, n\} \\ L_{ij}^{(k)} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- Par conséquent,

$$A = [M^{(1)}]^{-1} [M^{(2)}]^{-1} \dots [M^{(n-1)}]^{-1} A^{(n)}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- Par conséquent,

$$A = [M^{(1)}]^{-1} [M^{(2)}]^{-1} \dots [M^{(n-1)}]^{-1} A^{(n)}.$$

- La matrice triangulaire inférieure L dans la factorisation de A est le produit des matrices $L^{(k)}$

$$L = L^{(1)} L^{(2)} \dots L^{(n-1)}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Factorisation LU

- Par conséquent,

$$A = [M^{(1)}]^{-1} [M^{(2)}]^{-1} \dots [M^{(n-1)}]^{-1} A^{(n)}.$$

- La matrice triangulaire inférieure L dans la factorisation de A est le produit des matrices $L^{(k)}$

$$L = L^{(1)} L^{(2)} \dots L^{(n-1)}$$

- On obtient

$$\begin{aligned} LU &= L^{(1)} \dots L^{(n-1)} \cdot M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(2)} M^{(1)} A \\ &= [M^{(1)}]^{-1} \dots [M^{(n-1)}]^{-1} \cdot M^{(n-1)} \dots M^{(2)} M^{(1)} A \\ &= A. \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

La factorisation LU existe ssi Gauss marche.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

La factorisation LU existe ssi Gauss marche.

Théorème 2

Une matrice A admet une factorisation LU ssi : toutes les sous matrices principales A_k de la matrice A sont **inversible**,

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

REMARQUE

La factorisation LU existe ssi Gauss marche.

Théorème 2

Une matrice A admet une factorisation LU ssi : toutes les sous matrices principales A_k de la matrice A sont **inversible**,

Question : Est-ce que la décomposition LU est unique ?

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

LU unicité

- L'écriture $A = LU$: n^2 équations

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

LU unicité

- L'écriture $A = LU$: n^2 équations

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{nn} \end{pmatrix}$$

- le nombre d'inconnues est : $2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$,

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

LU unicité

- L'écriture $A = LU$: n^2 équations

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{nn} \end{pmatrix}$$

- le nombre d'inconnues est : $2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$,
- n inconnues en plus.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

LU unicité

- L'écriture $A = LU$: n^2 équations

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{nn} \end{pmatrix}$$

- le nombre d'inconnues est : $2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$,
- n inconnues en plus.
- Pour avoir l'unicité de la décomposition, on impose n **contraintes**.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

LU unicité

- L'écriture $A = LU$: n^2 équations

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{nn} \end{pmatrix}$$

- le nombre d'inconnues est : $2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$,
- n inconnues en plus.
- Pour avoir l'unicité de la décomposition, on impose n **contraintes**.
- De manière classique, on fait le choix suivant :

$$L_{11} = 1, L_{22} = 1, \dots, L_{nn} = 1.$$

i.e. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$L_{ii} = 1.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Théorème 3

Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1,

(i) Il existe

- 1 une matrice triangulaire inférieure L , avec $L_{ii} = 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- 2 une matrice triangulaire supérieure U telle que

$$A = LU$$

(ii) De plus, une telle décomposition est **unique**.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

1ère ligne de U :

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

1ère ligne de U :

$$1 \times U_{11} = a_{11} \Rightarrow U_{11} = a_{11}$$

$$1 \times U_{12} = a_{12} \Rightarrow U_{12} = a_{12}$$

$$1 \times U_{13} = a_{13} \Rightarrow U_{13} = a_{13}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

1ère ligne de U :

$$1 \times U_{11} = a_{11} \Rightarrow U_{11} = a_{11}$$

$$1 \times U_{12} = a_{12} \Rightarrow U_{12} = a_{12}$$

$$1 \times U_{13} = a_{13} \Rightarrow U_{13} = a_{13}$$

Pour $j = 1$ à n : $U_{1j} = a_{1j}$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

1ère ligne de U :

$$1 \times U_{11} = a_{11} \Rightarrow U_{11} = a_{11}$$

$$1 \times U_{12} = a_{12} \Rightarrow U_{12} = a_{12}$$

$$1 \times U_{13} = a_{13} \Rightarrow U_{13} = a_{13}$$

Pour $j = 1$ à n : $U_{1j} = a_{1j}$.

1ère colonne de L :

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

1ère ligne de U :

$$1 \times U_{11} = a_{11} \Rightarrow U_{11} = a_{11}$$

$$1 \times U_{12} = a_{12} \Rightarrow U_{12} = a_{12}$$

$$1 \times U_{13} = a_{13} \Rightarrow U_{13} = a_{13}$$

Pour $j = 1$ à n : $U_{1j} = a_{1j}$.

1ère colonne de L :

$$L_{21} \times U_{11} = a_{21} \Rightarrow L_{21} = \frac{a_{21}}{U_{11}}$$

$$L_{31} \times U_{11} = a_{31} \Rightarrow L_{31} = \frac{a_{31}}{U_{11}}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE II

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

2ème ligne de U :

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE II

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

2ème ligne de U :

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = a_{21} \Rightarrow U_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = a_{23} \Rightarrow U_{23} = a_{23} - L_{21}U_{13}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE II

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

2ème ligne de U :

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = a_{21} \Rightarrow U_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = a_{23} \Rightarrow U_{23} = a_{23} - L_{21}U_{13}$$

2ème colonne de L :

$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = a_{32} \Rightarrow L_{32} = \frac{1}{U_{22}}(a_{32} - L_{31}U_{12})$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

EXEMPLE II

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

2ème ligne de U :

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = a_{21} \Rightarrow U_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = a_{23} \Rightarrow U_{23} = a_{23} - L_{21}U_{13}$$

2ème colonne de L :

$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = a_{32} \Rightarrow L_{32} = \frac{1}{U_{22}}(a_{32} - L_{31}U_{12})$$

3ème ligne de U :

$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + 1 \times U_{33} = a_{33} \Rightarrow U_{33} = a_{33} - (L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23})$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

En général $LU = A$, donc pour tout $ij \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} \times U_{kj}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

En général $LU = A$, donc pour tout $ij \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} \times U_{kj}$$

Or L est triangulaire inférieure : $L_{ik} = 0$ pour $k > i$, i.e.,

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

En général $LU = A$, donc pour tout $ij \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} \times U_{kj}$$

Or L est triangulaire inférieure : $L_{ik} = 0$ pour $k > i$, i.e.,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^i L_{ik} U_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} + L_{ii} \times U_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} + U_{ij} \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

En général $LU = A$, donc pour tout $ij \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} \times U_{kj}$$

Or L est triangulaire inférieure : $L_{ik} = 0$ pour $k > i$, i.e.,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^i L_{ik} U_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} + L_{ii} \times U_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} + U_{ij} \\ \Rightarrow U_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}, \\ \Rightarrow L_{ji} &= \frac{1}{U_{ii}} (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} U_{ki}). \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Ainsi, la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalente à la résolution de deux systèmes triangulaires : $LU\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L\vec{y} = \vec{b}, \vec{y} = U\vec{x}$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Ainsi, la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalente à la résolution de deux systèmes triangulaires : $LU\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L\vec{y} = \vec{b}, \vec{y} = U\vec{x}$.

1 $L\vec{y} = \vec{b}$ (descente) : pour $i = 2$ à n ($y_1 = b_1$) :

$$y_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j = b_i \Rightarrow y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Ainsi, la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalente à la résolution de deux systèmes triangulaires : $LU\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L\vec{y} = \vec{b}, \vec{y} = U\vec{x}$.

1 $L\vec{y} = \vec{b}$ (descente) : pour $i = 2$ à n ($y_1 = b_1$) :

$$y_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j = b_i \Rightarrow y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j.$$

2 $U\vec{x} = \vec{y}$ (remontée) : $x_n = \frac{y_n}{U_{nn}}$, pour $j = n - 1$ à 1 :

$$U_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}y_j = y_i \Rightarrow x_i = \frac{1}{U_{ii}}(y_i - \sum_{j=i+1}^n U_{ij}y_j).$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Ainsi, la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalente à la résolution de deux systèmes triangulaires : $LU\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L\vec{y} = \vec{b}, \vec{y} = U\vec{x}$.

1 $L\vec{y} = \vec{b}$ (descente) : pour $i = 2$ à n ($y_1 = b_1$) :

$$y_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j = b_i \Rightarrow y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j.$$

2 $U\vec{x} = \vec{y}$ (remontée) : $x_n = \frac{y_n}{U_{nn}}$, pour $j = n - 1$ à 1 :

$$U_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}y_j = y_i \Rightarrow x_i = \frac{1}{U_{ii}}(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}y_j).$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.3 Méthodes de factorisation : LU

Ainsi, la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ est équivalente à la résolution de deux systèmes triangulaires : $LU\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L\vec{y} = \vec{b}, \vec{y} = U\vec{x}$.

1 $L\vec{y} = \vec{b}$ (descente) : pour $i = 2$ à n ($y_1 = b_1$) :

$$y_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j = b_i \Rightarrow y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j.$$

2 $U\vec{x} = \vec{y}$ (remontée) : $x_n = \frac{y_n}{U_{nn}}$, pour $j = n - 1$ à 1 :

$$U_{ii}x_i + \sum_{j=1}^{i-1} U_{ij}y_j = y_i \Rightarrow x_i = \frac{1}{U_{ii}}(y_i - \sum_{j=i+1}^n U_{ij}y_j).$$

REMARQUE

$U_{ii} \neq 0$ d'après le Théorème 2 (LU ssi tous les mineurs principaux sont non nuls, i.e. $\det(A_k) \neq 0, \forall k = 1, \dots, n$, où A_k les matrices intermédiaires de la réduction de Gauss).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

1 2.1 Introduction

2 2.2 La méthode de Gauss

3 2.3 Méthodes de factorisation : LU

4 2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

- 1 $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$;

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

- 1 $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$;
- 2 $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

- 1 $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$;
- 2 $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- 3 $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (A définie).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

- 1 $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$;
- 2 $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- 3 $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (A définie).
- 4 $\vec{x}^T A \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (définie positive).

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

DEFINITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite symétrique définie positive si :

- 1 $A^T = A$ (symétrique), i.e., $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$;
- 2 $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (positive), i.e., $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- 3 $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (A définie).
- 4 $\vec{x}^T A \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (définie positive).

Notation : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Montrons que la matrice A suivante est définie positive.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Montrons que la matrice A suivante est définie positive.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit \vec{x} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 .

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Montrons que la matrice A suivante est définie positive.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit \vec{x} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Alors

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Montrons que la matrice A suivante est définie positive.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit \vec{x} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Alors

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Montrons que la matrice A suivante est définie positive.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit \vec{x} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Alors

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Montrons que la matrice A suivante est définie positive.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit \vec{x} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Alors

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2. \end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE II

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\vec{x}^T A \vec{x} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE II

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{x}^T A \vec{x} &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2\end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE II

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{x}^T A \vec{x} &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2.\end{aligned}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE II

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{x}^T A \vec{x} &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2.\end{aligned}$$

Ce qui implique que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ non nul,

$$\vec{x}^T A \vec{x} = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0,$$

et $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$ si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Théorème 4

Une matrice A est symétrique définie positive si et seulement si :

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Théorème 4

Une matrice A est symétrique définie positive si et seulement si :

Toutes les sous-matrices A_k de A ($k = 1, \dots, n$) sont aussi symétriques définies positives.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Théorème 4

Une matrice A est symétrique définie positive si et seulement si :

Toutes les sous-matrices A_k de A ($k = 1, \dots, n$) sont aussi symétriques définies positives.

REMARQUE

$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ inversible (car : $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$)

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

⇒ Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

\Rightarrow Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

En particulier : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, i.e., $A_k^T = A_k$, i.e., A_k symétrique.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

\Rightarrow Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

En particulier : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, i.e., $A_k^T = A_k$, i.e., A_k symétrique.

Montrons que $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

\Rightarrow Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

En particulier : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, i.e., $A_k^T = A_k$, i.e., A_k symétrique.

Montrons que $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. On complète \vec{y} pour avoir un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^T$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

\Rightarrow Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

En particulier : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, i.e., $A_k^T = A_k$, i.e., A_k symétrique.

Montrons que $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. On complète \vec{y} pour avoir un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^T$.

Comme $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T A_k \vec{y}$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$, d'où

$\vec{y}^T A_k \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$, donc $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

\Rightarrow Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

En particulier : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, i.e., $A_k^T = A_k$, i.e., A_k symétrique.

Montrons que $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. On complète \vec{y} pour avoir un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^T$.

Comme $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T A_k \vec{y}$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$, d'où

$\vec{y}^T A_k \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$, donc $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

\Leftarrow Si $\forall k \in \{1, \dots, n\} : A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors pour $k = n$ on a $A = A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

⇒ Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

En particulier : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, i.e., $A_k^T = A_k$, i.e., A_k symétrique.

Montrons que $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. On complète \vec{y} pour avoir un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^T$.

Comme $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T A_k \vec{y}$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$, d'où

$\vec{y}^T A_k \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$, donc $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

⇐ Si $\forall k \in \{1, \dots, n\} : A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors pour $k = n$ on a $A = A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Conséquence du Théorème 4

Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc

1 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k$ inversible, d'où

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

PREUVE

⇒ Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

En particulier : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, i.e., $A_k^T = A_k$, i.e., A_k symétrique.

Montrons que $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. On complète \vec{y} pour avoir un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^T$.

Comme $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T A_k \vec{y}$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$, d'où

$\vec{y}^T A_k \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$, donc $A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

⇐ Si $\forall k \in \{1, \dots, n\} : A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors pour $k = n$ on a $A = A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Conséquence du Théorème 4

Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc

1 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, A_k$ inversible, d'où

2 $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$: A admet une décomposition LU .

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Théorème 5

Une matrice symétrique A est définie positive si et seulement si :

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Théorème 5

Une matrice symétrique A est définie positive si et seulement si :

Toutes les sous-matrices A_k de A ($k = 1, \dots, n$) ont un déterminant positif.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Dans cet exemple, nous avons montré que la matrice A suivante est définie positive en utilisant la définition.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Dans cet exemple, nous avons montré que la matrice A suivante est définie positive en utilisant la définition.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons également le confirmer via le Théorème 5.

$$\det(A_1) = \det[2] = 2 > 0,$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Dans cet exemple, nous avons montré que la matrice A suivante est définie positive en utilisant la définition.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons également le confirmer via le Théorème 5.

$$\det(A_1) = \det[2] = 2 > 0,$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0,$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

EXEMPLE I

Dans cet exemple, nous avons montré que la matrice A suivante est définie positive en utilisant la définition.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons également le confirmer via le Théorème 5.

$$\det(A_1) = \det[2] = 2 > 0,$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0,$$

$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 2 = 4 > 0$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Théorème de Cholesky

Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe une seule matrice L triangulaire inférieure à valeurs diagonales positives (mais pas nécessairement $= 1$) telle que

$$A = LL^T.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Algorithme de Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Algorithme de Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (L tri inf: $L_{ik} = 0$ pour $k > i$)

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} L_{kj}^T = \sum_{k=1}^n L_{ik} L_{jk} = \sum_{k=1}^i L_{ik} L_{jk} = \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} + L_{ii} L_{ji}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Algorithme de Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (L tri inf: $L_{ik} = 0$ pour $k > i$)

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} L_{kj}^T = \sum_{k=1}^n L_{ik} L_{jk} = \sum_{k=1}^i L_{ik} L_{jk} = \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} + L_{ii} L_{ji}.$$

1er cas : $i = j$

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{ik}} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}.$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Algorithme de Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (L tri inf: $L_{ik} = 0$ pour $k > i$)

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} L_{kj}^T = \sum_{k=1}^n L_{ik} L_{jk} = \sum_{k=1}^i L_{ik} L_{jk} = \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} + L_{ii} L_{ji}.$$

1er cas : $i = j$

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{ik}} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}.$$

2e cas : $i \neq j$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} \right).$$

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Algorithme 2 : Décomposition de Cholesky

Input : une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ de taille $n \times n$

Output : une matrice triangulaire inférieure L de taille $n \times n$ telle que $A = LL^\top$

```
1  $L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}};$ 
2 for  $j \leftarrow 2$  to  $n$  do
3    $L_{j1} \leftarrow a_{j1}/L_{11};$ 
4 end
5 for  $i \leftarrow 2$  to  $n - 1$  do
6    $L_{ii} \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2};$ 
7   for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$  do
8      $L_{ji} \leftarrow \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{jk} L_{ik}}{L_{ii}};$ 
9   end
10 end
11  $L_{nn} \leftarrow \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{nk}^2};$ 
12 return  $L;$ 
```

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

Algorithme 3 : Décomposition de Cholesky

Input : une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ de taille $n \times n$

Output : une matrice triangulaire inférieure L de taille $n \times n$ telle que $A = LL^\top$

```
1  $L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}};$ 
2 for  $j \leftarrow 2$  to  $n$  do
3    $L_{j1} \leftarrow a_{j1}/L_{11};$ 
4 end
5 for  $i \leftarrow 2$  to  $n - 1$  do
6    $L_{ii} \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2};$ 
7   for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$  do
8      $L_{ji} \leftarrow \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{jk} L_{ik}}{L_{ii}};$ 
9   end
10 end
11  $L_{nn} \leftarrow \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{nk}^2};$ 
12 return  $L;$ 
```

Exercice : Quel est le nombre total de \oplus \ominus \oslash \otimes \surd ?

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

REMARQUE

- Cholesky est deux fois plus rapide que LU pour résoudre des systèmes linéaires.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

REMARQUE

- Cholesky est deux fois plus rapide que LU pour résoudre des systèmes linéaires.
- Elle est utilisée par exemple dans les méthodes de simulation de Monte-Carlo.

2. Résolution des systèmes linéaires, méthodes directes

2.4 Méthodes de factorisation : Cholesky

REMARQUE

- Cholesky est deux fois plus rapide que LU pour résoudre des systèmes linéaires.
- Elle est utilisée par exemple dans les méthodes de simulation de Monte-Carlo.
- Elle intervient également dans le calcul de l'estimateur des moindres carrés ordinaires de β pour la régression linéaire multiple (comme $X^T X \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque X est de rang plein)