

# Méthodes Numériques

L2 MIAHS

**Fabien Navarro**

E-mail: [fabien.navarro@univ-paris1.fr](mailto:fabien.navarro@univ-paris1.fr)



# Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

1 3.0 Valeurs propres, vecteurs propres et normes matricielles

2 3.1 Introduction

3 3.2 Méthode de Jacobi

4 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

5 3.4 Analyse des méthodes itératives

6 3.5 Accélération de convergence : méthodes de relaxation

# Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 1 3.0 Valeurs propres, vecteurs propres et normes matricielles

## 2 3.1 Introduction

## 3 3.2 Méthode de Jacobi

## 4 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

## 5 3.4 Analyse des méthodes itératives

## 6 3.5 Accélération de convergence : méthodes de relaxation

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINITION (polynôme caractéristique)

Si  $A$  est une matrice carrée, alors le **polynôme caractéristique** de  $A$  est défini par

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINITION (polynôme caractéristique)

Si  $A$  est une matrice carrée, alors le **polynôme caractéristique** de  $A$  est défini par

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Si  $A$  est de taille  $n \times n$ , alors  $p$  est un polynôme de degré  $n$  et par conséquent admet au plus  $n$  zéros distincts (certains potentiellement complexes).

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINITION (valeurs propres et vecteurs propres)

- 1 Si  $p$  est le polynôme caractéristique de  $A$ , alors les zéros de  $p$  sont les valeurs propres de  $A$ .

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINITION (valeurs propres et vecteurs propres)

- 1 Si  $p$  est le polynôme caractéristique de  $A$ , alors les zéros de  $p$  sont les valeurs propres de  $A$ .

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

- 2 Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , et  $\vec{x} \neq 0$  un vecteur vérifiant  $\det(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ , alors  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINITION (valeurs propres et vecteurs propres)

- 1 Si  $p$  est le polynôme caractéristique de  $A$ , alors les zéros de  $p$  sont les valeurs propres de  $A$ .

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

- 2 Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , et  $\vec{x} \neq 0$  un vecteur vérifiant  $\det(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ , alors  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

##### REMARQUE

$\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINITION (valeurs propres et vecteurs propres)

- 1 Si  $p$  est le polynôme caractéristique de  $A$ , alors les zéros de  $p$  sont les valeurs propres de  $A$ .

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

- 2 Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , et  $\vec{x} \neq \vec{0}$  un vecteur vérifiant  $\det(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ , alors  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

##### REMARQUE

$\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Une fois qu'une valeur propre  $\lambda$  a été déterminée, le vecteur propre associé  $\vec{x} \neq \vec{0}$  est obtenu en résolvant le système  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , i.e.,

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXAMPLE 1

Montrons qu'il n'existe pas de vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  non nul, tel que  $A\vec{x}$  soit colinéaire à  $\vec{x}$  si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXAMPLE 1

Montrons qu'il n'existe pas de vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  non nul, tel que  $A\vec{x}$  soit colinéaire à  $\vec{x}$  si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines de son polynôme caractéristique.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

donc,  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXAMPLE 1

Montrons qu'il n'existe pas de vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  non nul, tel que  $A\vec{x}$  soit colinéaire à  $\vec{x}$  si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines de son polynôme caractéristique.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

donc,  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$ . Le vecteur propre  $\vec{x}$  associé à  $\lambda_1$  doit satisfaire le système

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix_1 + x_2 \\ -x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXAMPLE 1

Montrons qu'il n'existe pas de vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  non nul, tel que  $A\vec{x}$  soit colinéaire à  $\vec{x}$  si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines de son polynôme caractéristique.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

donc,  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$ . Le vecteur propre  $\vec{x}$  associé à  $\lambda_1$  doit satisfaire le système

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix_1 + x_2 \\ -x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

i.e.,  $x_2 = ix_1$  et  $x_1 = -ix_2$ .

Ainsi, si  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$ , une de ses composantes est réelle et l'autre est complexe.

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXAMPLE 2 I

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXAMPLE 2 I

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$



## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXAMPLE 2 I

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXAMPLE 2 I

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2] = (2 - \lambda)[6 - 5\lambda + \lambda^2] \end{aligned}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXAMPLE 2 I

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2] = (2 - \lambda)[6 - 5\lambda + \lambda^2] \\ &= -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2, \end{aligned}$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXAMPLE 2 I

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2] = (2 - \lambda)[6 - 5\lambda + \lambda^2] \\ &= -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2, \end{aligned}$$

donc  $A$  admet deux valeurs propres  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 2$  (de multiplicité deux).

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXAMPLE 2 II

Un vecteur propre  $\vec{x}_1$  associé à  $\lambda_1 = 3$  est solution de  $(A - 3I)\vec{x}_1 = \vec{0}$ ,

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXAMPLE 2 II

Un vecteur propre  $\vec{x}_1$  associé à  $\lambda_1 = 3$  est solution de  $(A - 3I)\vec{x}_1 = \vec{0}$ , i.e.,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ce qui implique que  $x_1 = 0$  et  $x_2 = x_3$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
A <- matrix(c(2,1,1,0,1,-1,0,2,4),3,3)
eigen(A)
```

```
## eigen() decomposition
## $values
## [1] 3 2 2
##
## $vectors
##           [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] 0.0000000 0.0000000 0.5773503
## [2,] 0.7071068 0.8944272 -0.5773503
## [3,] 0.7071068 0.4472136 -0.5773503
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINTION (rayon spectral)

Le rayon spectral  $\rho(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est défini par

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$$

où  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  les valeurs propres (réelles ou complexes) de  $A$ .



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINITION (rayon spectral)

Le rayon spectral  $\rho(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est défini par

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$$

où  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  les valeurs propres (réelles ou complexes) de  $A$ .

##### EXAMPLE 2 III

Comme le spectre de  $A$  (l'ensemble des valeurs propres de  $A$ ) vaut  $\{2, 3\}$ , on a  $\rho(A) = \max\{2, 3\} = 3$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINITION (rayon spectral)

Le rayon spectral  $\rho(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est défini par

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$$

où  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  les valeurs propres (réelles ou complexes) de  $A$ .

##### EXAMPLE 2 III

Comme le spectre de  $A$  (l'ensemble des valeurs propres de  $A$ ) vaut  $\{2, 3\}$ , on a  $\rho(A) = \max\{2, 3\} = 3$ .

##### REMARQUE

- Le rayon spectral est étroitement lié à la norme d'une matrice.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINITION (rayon spectral)

Le rayon spectral  $\rho(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est défini par

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$$

où  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  les valeurs propres (réelles ou complexes) de  $A$ .

#### EXAMPLE 2 III

Comme le spectre de  $A$  (l'ensemble des valeurs propres de  $A$ ) vaut  $\{2, 3\}$ , on a  $\rho(A) = \max\{2, 3\} = 3$ .

#### REMARQUE

- Le rayon spectral est étroitement lié à la norme d'une matrice.
- Dans la suite, nous aurons besoin de méthodes pour déterminer la distance entre deux matrices.

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

### DEFINITION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

**1**  $\|A\| \geq 0$  (positive);

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINITION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINITION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ;

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINITION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ;
- 4  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (inégalité triangulaire) ;

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINITION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ;
- 4  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (inégalité triangulaire) ;
- 5  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINTION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ;
- 4  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (inégalité triangulaire) ;
- 5  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINTION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ;
- 4  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (inégalité triangulaire) ;
- 5  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

#### REMARQUE

- Il s'agit donc d'une norme pour les matrices considérées comme vecteurs, qui vérifie en plus  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINTION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ;
- 4  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (inégalité triangulaire) ;
- 5  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

#### REMARQUE

- Il s'agit donc d'une norme pour les matrices considérées comme vecteurs, qui vérifie en plus  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .
- La distance entre les matrices  $A$  et  $B$  par rapport à cette norme matricielle est la suivante  $\|A - B\|$ .

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINTION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $\| \cdot \|$  vérifiant, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $\|A\| \geq 0$  (positive);
- 2  $\|A\| = 0$ , ssi  $A = 0$  (définie) ;
- 3  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ;
- 4  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (inégalité triangulaire) ;
- 5  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

#### REMARQUE

- Il s'agit donc d'une norme pour les matrices considérées comme vecteurs, qui vérifie en plus  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .
- La distance entre les matrices  $A$  et  $B$  par rapport à cette norme matricielle est la suivante  $\|A - B\|$ .
- Les normes les plus fréquemment considérées sont induites par des normes vectorielles (e.g.,  $\ell_2, \ell_\infty$ ).

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### DEFINTION (norme matricielle induite)

Soit  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme vectorielle  $\| \cdot \|$ , alors, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

est une **norme induite**.

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

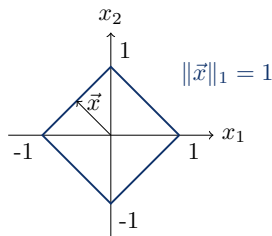
#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DEFINITION (norme matricielle induite)

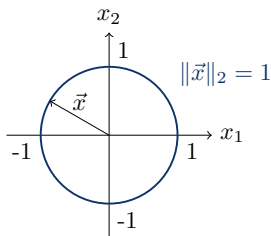
Soit  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme vectorielle  $\|\cdot\|$ , alors, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

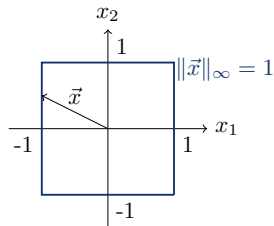
est une **norme induite**.



$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$



$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$



$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### REMARQUES

**1** Pour tout  $\vec{z} \neq 0$ ,  $\vec{x} = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}$  est un vecteur unitaire ( $\|\vec{z}\| = 1$ ). Par conséquent,

$$\max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \left\| A \left( \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|} \right) \right\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|},$$

et nous pouvons écrire de manière alternative

$$\|A\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|}.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### REMARQUES

**1** Pour tout  $\vec{z} \neq 0$ ,  $\vec{x} = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}$  est un vecteur unitaire ( $\|\vec{z}\| = 1$ ). Par conséquent,

$$\max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \left\| A \left( \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|} \right) \right\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|},$$

et nous pouvons écrire de manière alternative

$$\|A\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|}.$$

**2** Pour tout  $\vec{z} \neq 0$ , et pour toute norme induite  $\|\cdot\|$ , on a

$$\|A\vec{z}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{z}\|.$$



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### REMARQUES

**1** Pour tout  $\vec{z} \neq 0$ ,  $\vec{x} = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}$  est un vecteur unitaire ( $\|\vec{z}\| = 1$ ). Par conséquent,

$$\max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \left\| A \left( \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|} \right) \right\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|},$$

et nous pouvons écrire de manière alternative

$$\|A\| = \max_{\vec{z} \neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|}.$$

**2** Pour tout  $\vec{z} \neq 0$ , et pour toute norme induite  $\|\cdot\|$ , on a

$$\|A\vec{z}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{z}\|.$$

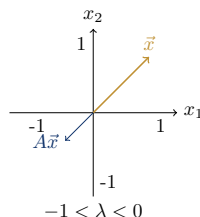
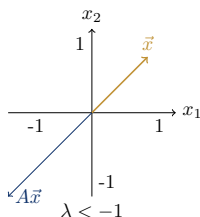
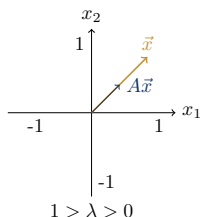
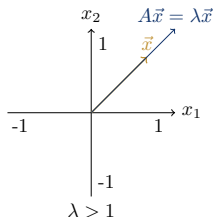
**3** La mesure donnée à une matrice sous une norme induite décrit comment la matrice "étire" les vecteurs unitaires par rapport à cette norme. L'étirement maximal est la norme de la matrice.

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

Si  $\vec{x}$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ , alors  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ .

- Si  $\lambda$  est réel et  $\lambda > 1$ , alors  $A$  a pour effet d'étirer  $\vec{x}$  par un facteur  $\lambda$ .
- Si  $\lambda$  est réel et  $0 < \lambda < 1$ , alors  $A$  a pour effet de rétrécir  $x$  par un facteur  $\lambda$ .
- Si  $\lambda < 0$ , les effets sont similaires, mais la direction de  $A\vec{x}$  est inversée.



## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXEMPLE 3 I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

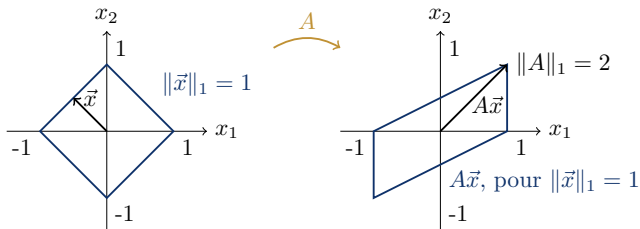
### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### EXEMPLE 3 I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \|\vec{x}\|_1=1} \|A\vec{x}\|_1 = 2$$



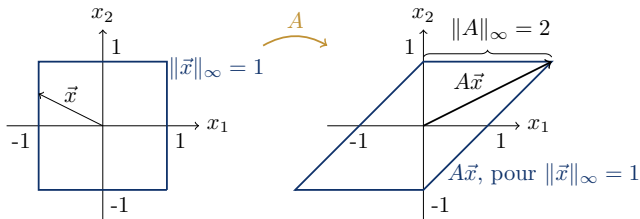
### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXEMPLE 3 II

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \|\vec{x}\|_{\infty} = 1} \|A\vec{x}\|_{\infty} = 2$$



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors on a

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\|A^T A\|} = \sqrt{\rho(A^T A)} \\ &= \rho(A), \text{ si } A = A^T,\end{aligned}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

### Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors on a

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\|A^T A\|} = \sqrt{\rho(A^T A)} \\ &= \rho(A), \text{ si } A = A^T,\end{aligned}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- $\|A\|_1 = \max$  de la norme-1 des colonnes ;

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors on a

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\|A^T A\|} = \sqrt{\rho(A^T A)} \\ &= \rho(A), \text{ si } A = A^T,\end{aligned}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- $\|A\|_1$  = max de la norme-1 des colonnes ;
- $\|A\|_\infty$  = max de la norme-1 des lignes ;



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

##### Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors on a

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\|A^T A\|} = \sqrt{\rho(A^T A)} \\ &= \rho(A), \text{ si } A = A^T,\end{aligned}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- $\|A\|_1$  = max de la norme-1 des colonnes ;
- $\|A\|_\infty$  = max de la norme-1 des lignes ;
- $\|A\|_2$  = racine carrée du rayon spectral de  $A^T A$ .

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

### EXEMPLE 4 I

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXEMPLE 4 I

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \{|a_{1j}| + |a_{2j}| + \dots + |a_{nj}|\} \\ &= \max\{|a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}|, |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}|, |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}|\} \\ &= \max\{|2| + |1| + |1|, |0| + |1| + |-1|, |0| + |2| + |4|\} \\ &= \max\{4, 2, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "1")
```

```
## [1] 6
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "1")
```

```
## [1] 6
```

```
abs(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]  
## [1,]    2    0    0  
## [2,]    1    1    2  
## [3,]    1    1    4
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "1")
```

```
## [1] 6
```

```
abs(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]  
## [1,]    2    0    0  
## [2,]    1    1    2  
## [3,]    1    1    4
```

```
colSums(abs(A))
```

```
## [1] 4 2 6
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "1")
```

```
## [1] 6
```

```
abs(A)
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         2    0    0
## [2,]         1    1    2
## [3,]         1    1    4
```

```
colSums(abs(A))
```

```
## [1] 4 2 6
```

```
max(colSums(abs(A)))
```

```
## [1] 6
```

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

### EXEMPLE 4 II

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXEMPLE 4 II

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ &= \max\{|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|, |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}|, |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}|\} \\ &= \max\{|2| + |0| + |0|, |1| + |1| + |2|, |1| + |-1| + |4|\} \\ &= \max\{2, 4, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "I")
```

```
## [1] 6
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "I")
```

```
## [1] 6
```

```
abs(A)
```

```
##           [,1] [,2] [,3]  
## [1,]         2    0    0  
## [2,]         1    1    2  
## [3,]         1    1    4
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "I")
```

```
## [1] 6
```

```
abs(A)
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         2     0     0
## [2,]         1     1     2
## [3,]         1     1     4
```

```
rowSums(abs(A))
```

```
## [1] 2 4 6
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
norm(A, "I")
```

```
## [1] 6
```

```
abs(A)
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         2     0     0
## [2,]         1     1     2
## [3,]         1     1     4
```

```
rowSums(abs(A))
```

```
## [1] 2 4 6
```

```
max(rowSums(abs(A)))
```

```
## [1] 6
```

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

### EXEMPLE 4 III

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice : Calculer  $\|A\|_2$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### EXEMPLE 4 III

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice : Calculer  $\|A\|_2$ .

```
norm(A, "2")
```

```
## [1] 4.732051
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
AAT <- A%*%t(A)
```

```
AAT
```

##		[, 1]	[, 2]	[, 3]
##	[1, ]	4	2	2
##	[2, ]	2	6	8
##	[3, ]	2	8	18



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
AAT <- A%*%t(A)
```

```
AAT
```

```
##           [,1] [,2] [,3]  
## [1,]         4     2     2  
## [2,]         2     6     8  
## [3,]         2     8    18
```

```
eigenAAT <- eigen(AAT)
```

```
eigenAAT$values
```

```
## [1] 22.392305  4.000000  1.607695
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
AAT <- A%*%t(A)
```

```
AAT
```

```
##           [,1] [,2] [,3]  
## [1,]         4     2     2  
## [2,]         2     6     8  
## [3,]         2     8    18
```

```
eigenAAT <- eigen(AAT)
```

```
eigenAAT$values
```

```
## [1] 22.392305  4.000000  1.607695
```

```
rhoA <- max(eigenAAT$values)
```

```
rhoA
```

```
## [1] 22.3923
```

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

```
AAT <- A%*%t(A)
```

```
AAT
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         4    2    2
## [2,]         2    6    8
## [3,]         2    8   18
```

```
eigenAAT <- eigen(AAT)
```

```
eigenAAT$values
```

```
## [1] 22.392305  4.000000  1.607695
```

```
rhoA <- max(eigenAAT$values)
```

```
rhoA
```

```
## [1] 22.3923
```

```
normA_2 <- sqrt(rhoA)
```

```
normA_2
```

```
## [1] 4.732051
```

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DÉFINITION (convergence d'une suite vectorielle)

Soit  $(\vec{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$  une suite vectorielle dans  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DÉFINITION (convergence d'une suite vectorielle)

Soit  $(\vec{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$  une suite vectorielle dans  $\mathbb{R}^n$ .

La suite  $(\vec{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$  a pour limite  $\vec{x}$  (converge vers  $\vec{x}$ ) par rapport à la norme  $\|\cdot\|$ , si,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| < \varepsilon, \quad \forall k > N(\varepsilon).$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

#### DÉFINITION (convergence d'une suite vectorielle)

Soit  $(\vec{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$  une suite vectorielle dans  $\mathbb{R}^n$ .

La suite  $(\vec{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$  a pour limite  $\vec{x}$  (converge vers  $\vec{x}$ ) par rapport à la norme  $\|\cdot\|$ , si,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| < \varepsilon, \quad \forall k > N(\varepsilon).$$

La suite  $(\vec{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$  converge vers  $\vec{x}$  ssi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

# Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

1 3.0 Valeurs propres, vecteurs propres et normes matricielles

2 3.1 Introduction

3 3.2 Méthode de Jacobi

4 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

5 3.4 Analyse des méthodes itératives

6 3.5 Accélération de convergence : méthodes de relaxation

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

But :

On considère des méthodes itératives pour résoudre des systèmes linéaires :  $A\vec{x} = \vec{b}$



# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### But :

On considère des méthodes itératives pour résoudre des systèmes linéaires :  $A\vec{x} = \vec{b}$

### Motivations

Les méthodes itératives sont efficaces :

- en terme de vitesse par rapport aux méthodes de résolutions directes.

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### But :

On considère des méthodes itératives pour résoudre des systèmes linéaires :  $A\vec{x} = \vec{b}$

### Motivations

Les méthodes itératives sont efficaces :

- en terme de vitesse par rapport aux méthodes de résolutions directes.
- en terme de stockage si la matrice  $A$  est creuse (i.e., avec beaucoup de zéros).

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### But :

On considère des méthodes itératives pour résoudre des systèmes linéaires :  $A\vec{x} = \vec{b}$

### Motivations

Les méthodes itératives sont efficaces :

- en terme de vitesse par rapport aux méthodes de résolutions directes.
- en terme de stockage si la matrice  $A$  est creuse (i.e., avec beaucoup de zéros).

### Méthodes

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux méthodes itératives de

- Jacobi, et de

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### But :

On considère des méthodes itératives pour résoudre des systèmes linéaires :  $A\vec{x} = \vec{b}$

### Motivations

Les méthodes itératives sont efficaces :

- en terme de vitesse par rapport aux méthodes de résolutions directes.
- en terme de stockage si la matrice  $A$  est creuse (i.e., avec beaucoup de zéros).

### Méthodes

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux méthodes itératives de

- Jacobi, et de
- Gauss-Seidel,

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### But :

On considère des **méthodes itératives** pour résoudre des **systèmes linéaires** :  $A\vec{x} = \vec{b}$

### Motivations

Les méthodes itératives sont efficaces :

- en terme de **vitesse** par rapport aux méthodes de résolutions directes.
- en terme de **stockage** si la matrice **A** est **creuse** (i.e., avec beaucoup de zéros).

### Méthodes

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux méthodes itératives de

- **Jacobi**, et de
- **Gauss-Seidel**,

des méthodes itératives classiques (qui datent de la fin du XVIIIe siècle).

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### Principe :

Une méthode itérative se présente sous la forme :

- $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$  donné.

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### Principe :

Une méthode itérative se présente sous la forme :

- $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$  donné.
- On construit une suite de vecteurs  $(\vec{x}^{(k)})_{k \geq 0}$  par un procédé itératif :

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}.$$

où  $T$  est une matrice qui dépend de  $A$  (appelée **matrice d'itération**) et  $\vec{c}$  un vecteur dépendant de  $A$  et de  $\vec{b}$ .

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### Principe :

Une méthode itérative se présente sous la forme :

- $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$  donné.
- On construit une suite de vecteurs  $(\vec{x}^{(k)})_{k \geq 0}$  par un procédé itératif :

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}.$$

où  $T$  est une matrice qui dépend de  $A$  (appelée **matrice d'itération**) et  $\vec{c}$  un vecteur dépendant de  $A$  et de  $\vec{b}$ .

- avec la propriété : pour tout  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| = 0.$$

pour une norme  $\|\cdot\|$  donnée de  $\mathbb{R}^n$ .



## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.1 Introduction

#### Principe :

Les méthodes itératives classiques sont des variations autour d'un même thème :

- 1 On fixe  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### Principe :

Les méthodes itératives classiques sont des variations autour d'un même thème :

1 On fixe  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

2 On décompose  $A$  sous la forme  $A = M - N$ , avec  $M$  inversible.

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow (M - N)\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}.$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### Principe :

Les méthodes itératives classiques sont des variations autour d'un même thème :

1 On fixe  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

2 On décompose  $A$  sous la forme  $A = M - N$ , avec  $M$  inversible.

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow (M - N)\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}.$$

i.e., (itération de Picard)

$$M\vec{x}^{(k+1)} = N\vec{x}^{(k)} + \vec{b},$$

d'où

$$\vec{x}^{(k+1)} = M^{-1}N\vec{x}^{(k)} + M^{-1}\vec{b}.$$

(avec  $T = M^{-1}N$  et  $\vec{c} = M^{-1}\vec{b}$ ).

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### Notations I

- Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

### Notations I

- Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- on note par  $D$  la diagonale de  $A$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i.e,  $D_{ii} = a_{ii}$  pour  $i = j$  et  $D_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.1 Introduction

#### Notations II

- et on note par  $L$  et  $U$  les matrices triangulaires inférieure et supérieure

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i.e,  $L_{ij} = -a_{ji}$  pour  $i > j$  et  $L_{ij} = 0$  pour  $j \geq i$ .

i.e,  $U_{ij} = -a_{ji}$  pour  $j > i$  et  $U_{ij} = 0$  pour  $i \geq j$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.1 Introduction

#### EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = D - U - L.$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

```
A <- matrix(c(2,-1,0,-1,2,-1,0,-1,2),3,3)
D <- diag(diag(A)); D
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         2    0    0
## [2,]         0    2    0
## [3,]         0    0    2
```



# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

```
A <- matrix(c(2,-1,0,-1,2,-1,0,-1,2),3,3)
D <- diag(diag(A)); D
```

```
##          [,1] [,2] [,3]
## [1,]      2    0    0
## [2,]      0    2    0
## [3,]      0    0    2
```

```
L <- -lower.tri(A)*A; L
```

```
##          [,1] [,2] [,3]
## [1,]      0    0    0
## [2,]      1    0    0
## [3,]      0    1    0
```

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.1 Introduction

```
A <- matrix(c(2,-1,0,-1,2,-1,0,-1,2),3,3)
D <- diag(diag(A)); D
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         2     0     0
## [2,]         0     2     0
## [3,]         0     0     2
```

```
L <- -lower.tri(A)*A; L
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         0     0     0
## [2,]         1     0     0
## [3,]         0     1     0
```

```
U <- -upper.tri(A)*A; U
```

```
##           [,1] [,2] [,3]
## [1,]         0     1     0
## [2,]         0     0     1
## [3,]         0     0     0
```

# Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

1 3.0 Valeurs propres, vecteurs propres et normes matricielles

2 3.1 Introduction

3 3.2 Méthode de Jacobi

4 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

5 3.4 Analyse des méthodes itératives

6 3.5 Accélération de convergence : méthodes de relaxation

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### La méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à la décomposition suivante :

$$M = D \quad \text{et} \quad N = L + U.$$

(i.e.,  $T = M^{-1}N = D^{-1}(L + U)$  et  $\vec{c} = M^{-1}\vec{b} = D^{-1}\vec{b}$ )

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### La méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à la décomposition suivante :

$$M = D \quad \text{et} \quad N = L + U.$$

(i.e.,  $T = M^{-1}N = D^{-1}(L + U)$  et  $\vec{c} = M^{-1}\vec{b} = D^{-1}\vec{b}$ )

Et si  $D^{-1}$  existe (i.e.,  $a_{ii} \neq 0$  pour tout  $i$ ), alors, la méthode itérative associée est définie par :  $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$  donné.

Pour  $k \geq 0$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### La méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à la décomposition suivante :

$$M = D \quad \text{et} \quad N = L + U.$$

(i.e.,  $T = M^{-1}N = D^{-1}(L + U)$  et  $\vec{c} = M^{-1}\vec{b} = D^{-1}\vec{b}$ )

Et si  $D^{-1}$  existe (i.e.,  $a_{ii} \neq 0$  pour tout  $i$ ), alors, la méthode itérative associée est définie par :  $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$  donné.

Pour  $k \geq 0$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}.$$

#### REMARQUE

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4

On cherche la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $b = (1, 1, 1)^T$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4

On cherche la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $b = (1, 1, 1)^T$ . Le système associé

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(1 + x_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(1 + x_2) \end{cases}$$



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4

On cherche la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $b = (1, 1, 1)^T$ . Le système associé

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(1 + x_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(1 + x_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

La méthode de Jacobi consiste, à chaque itération  $k + 1$ , à résoudre chaque équation du système par rapport à l'une des variables, les autres étant fixées à leurs valeurs obtenues à l'itération précédente.

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4

Le système  $A\vec{x} = \vec{b}$ , se réécrit sous la forme  $\vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$ , avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.2 Méthode de Jacobi

### Forme composante par composante de la méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à l'équation vectorielle :

$$D\vec{x}^{(k+1)} = (L + U)\vec{x}^{(k)} + \vec{b}.$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.2 Méthode de Jacobi

### Forme composante par composante de la méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à l'équation vectorielle :

$$D\vec{x}^{(k+1)} = (L + U)\vec{x}^{(k)} + \vec{b}.$$

pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n -a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.2 Méthode de Jacobi

### Forme composante par composante de la méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à l'équation vectorielle :

$$D\vec{x}^{(k+1)} = (L + U)\vec{x}^{(k)} + \vec{b}.$$

pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n -a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

i.e.,  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné, pour  $k \geq 0$  : pour  $i = 1$  à  $n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right].$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4 II

On cherche la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $b = (1, 1, 1)^T$ . Le système admet une solution unique  $\vec{x} = (1.5, 2.0, 1.5)^T$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4 II

On cherche la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $b = (1, 1, 1)^T$ . Le système admet une solution unique  $\vec{x} = (1.5, 2.0, 1.5)^T$ .

On utilise la méthode de Jacobi pour trouver des approximations  $\vec{x}^{(k)}$  de  $\vec{x}$  en partant de  $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$  jusqu'à obtenir une précision erreur relative

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|_{\infty} / \|\vec{x}^{(k+1)}\|_{\infty} < 10^{-2}.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4 II

On cherche la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $b = (1, 1, 1)^T$ . Le système admet une solution unique  $\vec{x} = (1.5, 2.0, 1.5)^T$ .

On utilise la méthode de Jacobi pour trouver des approximations  $\vec{x}^{(k)}$  de  $\vec{x}$  en partant de  $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$  jusqu'à obtenir une précision erreur relative

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty / \|\vec{x}^{(k+1)}\|_\infty < 10^{-2}.$$

A partir de l'approximation initiale  $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$ , on a

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 1x_2^{(0)} + 0x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 1x_1^{(0)} + 1x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1) = 1.5 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 0x_1^{(0)} + 1x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0 + 1) = 1 \end{cases}$$



# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.2 Méthode de Jacobi

### EXEMPLE 4 II

Par suite, l'approximation à la deuxième itération est donnée par

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = 1.5 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \end{cases}$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.2 Méthode de Jacobi

### EXEMPLE 4 II

Par suite, l'approximation à la deuxième itération est donnée par

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = 1.5 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \end{cases}$$

...

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

#### EXEMPLE 4 II

Par suite, l'approximation à la deuxième itération est donnée par

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = 1.5 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \end{cases}$$

...

On s'arrête après 10 itérations, car

$$\|\vec{x}^{(10)} - \vec{x}^{(9)}\|_\infty / \|\vec{x}^{(10)}\|_\infty \approx 0.007 < 10^{-2}$$

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1$	1.00	1.25	1.25	1.375	1.375	1.438	1.438	1.469	1.469	1.484
$x_2$	1.50	1.50	1.75	1.750	1.875	1.875	1.938	1.938	1.969	1.969
$x_3$	1.00	1.25	1.25	1.375	1.375	1.438	1.438	1.469	1.469	1.484

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.2 Méthode de Jacobi

---

**Algorithme 1** : Méthode itérative de Jacobi

---

**Input** :  $A, \vec{b}, \vec{x}^{(0)} = \vec{x_0}$ ; tolérance  $TOL$ ; nombre maximum d'itérations  $N$ .

**Output** : La solution approchée  $x_1, \dots, x_n$ .

```
1  $k \leftarrow 1$ 
2 while  $k \leq N$  do
3   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
4      $x_i \leftarrow \left( -\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{0j} + b_i \right) / a_{ii}$ 
5   end
6   if  $\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < TOL$  then
7     return  $(x_1, \dots, x_n)$ 
8   end
9    $k \leftarrow k + 1$ 
10  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
11     $x_{0i} \leftarrow x_i$ 
12  end
13 end
```

---

# Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

1 3.0 Valeurs propres, vecteurs propres et normes matricielles

2 3.1 Introduction

3 3.2 Méthode de Jacobi

4 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

5 3.4 Analyse des méthodes itératives

6 3.5 Accélération de convergence : méthodes de relaxation

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

### Principe

- Une amélioration possible de la méthode de Jacobi consiste à prendre en comptes les composantes de  $\vec{x}^{(k)}$  déjà calculées.

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

### Principe

- Une amélioration possible de la méthode de Jacobi consiste à prendre en comptes les composantes de  $\vec{x}^{(k)}$  déjà calculées.
- En effet, les composantes de  $\vec{x}^{(k)}$  sont utilisées pour calculer toutes les composantes  $x_i^{(k+1)}$  de  $\vec{x}^{(k+1)}$ .

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

#### Principe

- Une amélioration possible de la méthode de Jacobi consiste à prendre en comptes les composantes de  $\vec{x}^{(k)}$  déjà calculées.
- En effet, les composantes de  $\vec{x}^{(k)}$  sont utilisées pour calculer toutes les composantes  $x_i^{(k+1)}$  de  $\vec{x}^{(k+1)}$ .
- Mais, pour  $i > 1$ , les composantes  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}$  de  $\vec{x}^{(k+1)}$  ont déjà été calculées et sont censées être de meilleures approximations des solutions  $x_1, \dots, x_{i-1}$  que  $x_1^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}$ .



# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

### Principe

- Une amélioration possible de la méthode de Jacobi consiste à prendre en comptes les composantes de  $\vec{x}^{(k)}$  déjà calculées.
- En effet, les composantes de  $\vec{x}^{(k)}$  sont utilisées pour calculer toutes les composantes  $x_i^{(k+1)}$  de  $\vec{x}^{(k+1)}$ .
- Mais, pour  $i > 1$ , les composantes  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}$  de  $\vec{x}^{(k+1)}$  ont déjà été calculées et sont censées être de meilleures approximations des solutions  $x_1, \dots, x_{i-1}$  que  $x_1^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}$ .
- Il semble raisonnable, alors, de calculer  $x_i^{(k+1)}$  en utilisant ces dernières valeurs calculées. i.e.,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k+1)}) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} x_j^{(k)}) + b_i}{a_{ii}},$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

#### La méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel (GS) consiste donc à faire le choix suivant :

$$M = D - L$$

$$N = U$$

$$A = M - N,$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

#### La méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel (GS) consiste donc à faire le choix suivant :

$$M = D - L$$

$$N = U$$

$$A = M - N,$$

$\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné, pour  $k \geq 0$  :

$$\vec{x}^{(k+1)} = (D - L)^{-1}U\vec{x}^{(k)} + (D - L)^{-1}\vec{b}.$$

(si  $D - L$  est inversible, i.e.,  $a_{ii} \neq 0$  pour tout  $i$ ).

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

#### Forme composante par composante de la méthode de GS

Comme

$$(\textcolor{green}{D} - \textcolor{blue}{L})\vec{x}^{(k+1)} = \textcolor{red}{U}\vec{x}^{(k)} + \vec{b},$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

### Forme composante par composante de la méthode de GS

Comme

$$(\textcolor{green}{D} - \textcolor{blue}{L})\vec{x}^{(k+1)} = \textcolor{red}{U}\vec{x}^{(k)} + \vec{b},$$

Pour  $i = 1$  à  $n$  (la ligne  $i$ )

$$\textcolor{green}{a}_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \textcolor{blue}{-a}_{ij}x_j^{(k+1)} = - \sum_{j=i+1}^n \textcolor{red}{a}_{ij}x_j^{(k)} + b_i.$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

### Forme composante par composante de la méthode de GS

Comme

$$(\textcolor{green}{D} - \textcolor{blue}{L})\vec{x}^{(k+1)} = \textcolor{red}{U}\vec{x}^{(k)} + \vec{b},$$

Pour  $i = 1$  à  $n$  (la ligne  $i$ )

$$\textcolor{green}{a}_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \textcolor{blue}{-a}_{ij}x_j^{(k+1)} = - \sum_{\textcolor{red}{j}=i+1}^n \textcolor{red}{a}_{ij}x_j^{(k)} + b_i.$$

En résumé, la méthode de GS est donnée par :  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné

Pour  $i = 1$  à  $n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right].$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

### Forme composante par composante de la méthode de GS

Comme

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}\vec{x}^{(k)} + \vec{b},$$

Pour  $i = 1$  à  $n$  (la ligne  $i$ )

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij}x_j^{(k+1)} = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i.$$

En résumé, la méthode de GS est donnée par :  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné

Pour  $i = 1$  à  $n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right].$$

### REMARQUE

- En pratique les formes matricielles et composante par composante peuvent être utilisées, la formulation générale est plus utile à des fins théoriques.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

#### EXEMPLE

A partir de  $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)^T$ , en utilisant les composantes  $x_1^{(1)}$  et  $x_2^{(1)}$  on a

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 1x_2^{(0)} + 0x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + 1x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1) = 1.5 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 0x_1^{(0)} + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 0 + 1.5) = 1.25 \end{cases}$$



# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

### EXEMPLE

Avec GS, on s'arrête après 6 itérations, car

$$\|\vec{x}^{(6)} - \vec{x}^{(5)}\|_{\infty} / \|\vec{x}^{(6)}\|_{\infty} \approx 0.007 < 10^{-2}$$

$k$	1	2	3	4	5	6
$x_1$	1.000	1.250	1.375	1.438	1.469	1.484
$x_2$	1.500	1.750	1.875	1.938	1.969	1.984
$x_3$	1.250	1.375	1.438	1.469	1.484	1.492

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

#### EXEMPLE

Avec GS, on s'arrête après 6 itérations, car

$$\|\vec{x}^{(6)} - \vec{x}^{(5)}\|_{\infty} / \|\vec{x}^{(6)}\|_{\infty} \approx 0.007 < 10^{-2}$$

$k$	1	2	3	4	5	6
$x_1$	1.000	1.250	1.375	1.438	1.469	1.484
$x_2$	1.500	1.750	1.875	1.938	1.969	1.984
$x_3$	1.250	1.375	1.438	1.469	1.484	1.492

#### REMARQUE

- On a besoin d'environ deux fois moins d'itérations que Jacobi pour obtenir la même précision.
- Il n'existe pas de résultat général permettant de montrer que GS converge plus vite que Jacobi (sauf pour certaines matrices particulières).

# Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

1 3.0 Valeurs propres, vecteurs propres et normes matricielles

2 3.1 Introduction

3 3.2 Méthode de Jacobi

4 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

5 3.4 Analyse des méthodes itératives

6 3.5 Accélération de convergence : méthodes de relaxation

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### Analyses des méthodes itératives

Pour étudier la convergence des méthodes itératives on considère la formulation :

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

où  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné.

La relation entre norme induite et rayon spectral fournit un résultat permettant l'analyse de la convergence des méthodes itératives.

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

### Analyses des méthodes itératives

Pour étudier la convergence des méthodes itératives on considère la formulation :

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

où  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné.

La relation entre norme induite et rayon spectral fourni un résultat permettant l'analyse de la convergence des méthodes itératives.

### REMARQUES

- Au Chapitre 1, nous avons étudié des méthodes itératives pour trouver les racines de  $f(x) = 0$  ou les points fixes de  $x = g(x)$ .
- Dans ce contexte, la convergence nécessite que  $|g'(x)| < 1$ .
- Nous étudions maintenant une extension de l'analyse aux systèmes linéaires en  $n$  dimensions ( $\vec{x} = g(\vec{x}) = T\vec{x} + \vec{c}$ , avec  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ).

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

Théorème 0 (approximation du rayon spectral par une norme subordonnée)

(i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

Théorème 0 (approximation du rayon spectral par une norme subordonnée)

(i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Alors, on a toujours

$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

Théorème 0 (approximation du rayon spectral par une norme subordonnée)

(i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Alors, on a toujours

$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(ii) Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,



# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

Théorème 0 (approximation du rayon spectral par une norme subordonnée)

(i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Alors, on a toujours

$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(ii) Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  
il existe au moins une norme induite  $\|\cdot\|$  tel que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### PREUVE

(i) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  valeur propre de  $A$  et  $\vec{x}$  un vecteur propre associé, alors  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . On a

$$\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\| = \|A\vec{x}\| \leq \|A\|\|\vec{x}\|.$$

On en déduit que toute valeur propre  $\lambda$  vérifie  $|\lambda| \leq \|A\|$  et donc

$$\rho(A) = \max_i (|\lambda_i|) \leq \|A\|.$$

(ii) admis.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

Le résultat suivant donne un critère fondamental de convergence d'une méthode itérative.

#### Théorème 1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

Le résultat suivant donne un critère fondamental de convergence d'une méthode itérative.

#### Théorème 1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La méthode itérative :  $\vec{x}_0$  donné dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

est convergente.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

Le résultat suivant donne un critère fondamental de convergence d'une méthode itérative.

#### Théorème 1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La méthode itérative :  $\vec{x}_0$  donné dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

est convergente.

(ii)  $\rho(T) < 1$ .

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

Le résultat suivant donne un critère fondamental de convergence d'une méthode itérative.

#### Théorème 1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La méthode itérative :  $\vec{x}_0$  donné dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

est convergente.

(ii)  $\rho(T) < 1$ .

(iii) Il existe au moins une norme matricielle subordonnée  $\|\cdot\|$  tq

$$\|T\| < 1.$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

### PREUVE

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}.$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

### PREUVE

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$ . Or,

$$\begin{aligned}\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x} &= T\vec{x}^{(k)} + \vec{c} - T\vec{x} - \vec{c} = T(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}) \\ \vec{e}^{(k+1)} &= T\vec{e}^{(k)}\end{aligned}$$



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

##### PREUVE

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$ . Or,

$$\begin{aligned}\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x} &= T\vec{x}^{(k)} + \vec{c} - T\vec{x} - \vec{c} = T(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}) \\ \vec{e}^{(k+1)} &= T\vec{e}^{(k)}\end{aligned}$$

i.e.,  $\vec{e}^{(k+1)} = T\vec{e}^{(k)}, \forall k \geq 0$ . Donc  $\vec{e}^{(k)} = T^k \vec{e}^{(0)}$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### PREUVE

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$ . Or,

$$\begin{aligned}\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x} &= T\vec{x}^{(k)} + \vec{c} - T\vec{x} - \vec{c} = T(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}) \\ \vec{e}^{(k+1)} &= T\vec{e}^{(k)}\end{aligned}$$

i.e.,  $\vec{e}^{(k+1)} = T\vec{e}^{(k)}, \forall k \geq 0$ . Donc  $\vec{e}^{(k)} = T^k \vec{e}^{(0)}$ .

On a (Exercice 5 TD0), pour tout  $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k \vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow \rho(T) < 1.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### PREUVE

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $\rho(T) < 1$ . D'après Th0(ii) :  $\exists \|\cdot\|$  tq  $\|T\| \leq \rho(T) + \varepsilon$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### PREUVE

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $\rho(T) < 1$ . D'après Th0(ii) :  $\exists \|\cdot\|$  tq  $\|T\| \leq \rho(T) + \varepsilon$ .

Pour  $\varepsilon = (1 - \rho(T))/2$ , on a

$$\rho(T) + \varepsilon < 1,$$

et par suite  $\|T\| < 1$ .

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

### PREUVE

(iii)  $\Rightarrow$  (i) TD0 Exercice 5 : Si  $\|T\| < 1$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ .

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

### PREUVE

(iii)  $\Rightarrow$  (i) TD0 Exercice 5 : Si  $\|T\| < 1$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ .

Or,  $\vec{e}^{(k)} = T^k \vec{e}^{(0)}$ . Par conséquent,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{e}^{(k)} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x},$$

i.e., la méthode est convergente.

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.4 Analyse des méthodes itératives

##### Corrolaire

Dans le cas où  $A = M - N$  et  $T = M^{-1}N$ ,

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.4 Analyse des méthodes itératives

##### Corrolaire

Dans le cas où  $A = M - N$  et  $T = M^{-1}N$ ,

La méthode itérative :  $\vec{x}_0$  donné dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$



### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.4 Analyse des méthodes itératives

##### Corrolaire

Dans le cas où  $A = M - N$  et  $T = M^{-1}N$ ,

La méthode itérative :  $\vec{x}_0$  donné dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

est convergente ssi

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

#### Corollaire

Dans le cas où  $A = M - N$  et  $T = M^{-1}N$ ,

La méthode itérative :  $\vec{x}_0$  donné dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

est convergente ssi

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

**Question :** conditions suffisante(s) sur  $M$  et  $N$  pour avoir  $\rho(M^{-1}N) < 1$  ?

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

#### Théorème 2

Soit  $A$  une matrice symétrique et définie positive. On suppose que  $A$  se décompose en

$$A = M - N.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.4 Analyse des méthodes itératives

##### Théorème 2

Soit  $A$  une matrice symétrique et définie positive. On suppose que  $A$  se décompose en

$$A = M - N.$$

Si la matrice  $M^T + N$  est définie positive,

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

#### Théorème 2

Soit  $A$  une matrice symétrique et définie positive. On suppose que  $A$  se décompose en

$$A = M - N.$$

Si la matrice  $M^T + N$  est définie positive, Alors,

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### PREUVE I

On cherche à montrer que : si  $M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y}$  avec  $\vec{y}$  vecteur propre ( $\neq 0$ ) associé à  $\lambda$ , alors  $|\lambda| < 1$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

##### PREUVE I

On cherche à montrer que : si  $M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y}$  avec  $\vec{y}$  vecteur propre ( $\neq 0$ ) associé à  $\lambda$ , alors  $|\lambda| < 1$ .

On a,

$$\begin{aligned}M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y} &\Rightarrow N\vec{y} = \lambda M\vec{y} \\&\Rightarrow M\vec{y} - N\vec{y} = M\vec{y} - \lambda M\vec{y} \\&\Rightarrow (M - N)\vec{y} = M\vec{y}(1 - \lambda) \\&\Rightarrow \vec{y}^T A\vec{y} = (1 - \lambda)\vec{y}^T M\vec{y}\end{aligned}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

##### PREUVE I

On cherche à montrer que : si  $M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y}$  avec  $\vec{y}$  vecteur propre ( $\neq 0$ ) associé à  $\lambda$ , alors  $|\lambda| < 1$ .

On a,

$$\begin{aligned}M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y} &\Rightarrow N\vec{y} = \lambda M\vec{y} \\&\Rightarrow M\vec{y} - N\vec{y} = M\vec{y} - \lambda M\vec{y} \\&\Rightarrow (M - N)\vec{y} = M\vec{y}(1 - \lambda) \\&\Rightarrow \vec{y}^T A \vec{y} = (1 - \lambda)\vec{y}^T M \vec{y}\end{aligned}$$

Or  $A$  est définie positive, donc

$$(1 - \lambda)\vec{y}^T M \vec{y} > 0.$$



# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Analyse des méthodes itératives

### PREUVE II

De plus, comme  $N\vec{y} = \lambda M\vec{y}$  on a

$$(M^T + N)\vec{y} = M^T\vec{y} + N\vec{y} = M^T\vec{y} + \lambda M\vec{y}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### PREUVE II

De plus, comme  $N\vec{y} = \lambda M\vec{y}$  on a

$$(M^T + N)\vec{y} = M^T\vec{y} + N\vec{y} = M^T\vec{y} + \lambda M\vec{y}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\vec{y}^T(M^T + N)\vec{y} &= \vec{y}^T M^T \vec{y} + \lambda \vec{y}^T M \vec{y} \\ &= (1 + \lambda) \vec{y}^T M \vec{y}.\end{aligned}$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Analyse des méthodes itératives

#### PREUVE II

De plus, comme  $N\vec{y} = \lambda M\vec{y}$  on a

$$(M^T + N)\vec{y} = M^T\vec{y} + N\vec{y} = M^T\vec{y} + \lambda M\vec{y}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\vec{y}^T(M^T + N)\vec{y} &= \vec{y}^T M^T \vec{y} + \lambda \vec{y}^T M \vec{y} \\ &= (1 + \lambda) \vec{y}^T M \vec{y}.\end{aligned}$$

Or  $M^T + N$  est définie positive, donc

$$(1 + \lambda) \vec{y}^T M \vec{y} > 0.$$

Donc,  $(1 - \lambda)/(1 + \lambda) > 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(1 + \lambda) > 0 \Rightarrow 1 - \lambda^2 > 0$ , i.e.,  $|\lambda| < 1$ .

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.4 Analyse des méthodes itératives

#### DÉFINITION

Une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est dite **à diagonale strictement dominante** si pour tout  $i = 1$  à  $n$ , on a

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}|.$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.4 Analyse des méthodes itératives

##### EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 2 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |-5| > |2| + |1| \\ |10| > |7| + |2| \\ |11| > |5| + |5| \end{array}$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

#### EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 2 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |-5| > |2| + |1| \\ |10| > |7| + |2| \\ |11| > |5| + |5| \end{array}$$

#### Remarque

- Une matrice  $A$  à diagonale strictement dominante est toujours inversible.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

Théorème 3 (Convergence Jacobi)

Si  $A$  est une matrice symétrique et à diagonale strictement dominante.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

#### Théorème 3 (Convergence Jacobi)

Si  $A$  est une matrice symétrique et à diagonale strictement dominante.

Alors, la méthode de Jacobi est convergente.



## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

#### Théorème 3 (Convergence Jacobi)

Si  $A$  est une matrice symétrique et à diagonale strictement dominante.

Alors, la méthode de Jacobi est convergente.

Preuve : Exercice 1 TD5

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.4 Analyse des méthodes itératives

Théorème 4 (Convergence Gauss-Seidel)

Si la matrice  $A$  est symétrique et définie positive,

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.4 Analyse des méthodes itératives

##### Théorème 4 (Convergence Gauss-Seidel)

Si la matrice  $A$  est symétrique et définie positive,

Alors, la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.4 Analyse des méthodes itératives

### Théorème 4 (Convergence Gauss-Seidel)

Si la matrice  $A$  est symétrique et définie positive,

Alors, la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Preuve : Exercice 1 TD5

# Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

1 3.0 Valeurs propres, vecteurs propres et normes matricielles

2 3.1 Introduction

3 3.2 Méthode de Jacobi

4 3.3 Méthode de Gauss-Seidel

5 3.4 Analyse des méthodes itératives

6 3.5 Accélération de convergence : méthodes de relaxation

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Accélération de convergence

- La vitesse de convergence d'une méthode itérative dépend du rayon spectral de la matrice associée à la méthode.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Accélération de convergence

- La vitesse de convergence d'une méthode itérative dépend du rayon spectral de la matrice associée à la méthode.
- Une façon de sélectionner une procédure pour accélérer la convergence est de choisir une méthode dont la matrice associée a un rayon spectral minimal.

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Méthodes de relaxation

On introduit un paramètre  $\omega$  réel non nul, puis on écrit:

$$D = \left(\frac{1}{\omega}\right)D + \frac{\omega - 1}{\omega}D.$$



## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Méthodes de relaxation

On introduit un paramètre  $\omega$  réel non nul, puis on écrit:

$$D = \left(\frac{1}{\omega}\right)D + \frac{\omega - 1}{\omega}D.$$

La matrice  $A$  est alors décomposée en :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\omega}D - L\right) - \left(\frac{\omega - 1}{\omega}D + U\right) \\ &= M - N, \end{aligned}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Méthodes de relaxation

On introduit un paramètre  $\omega$  réel non nul, puis on écrit:

$$D = \left(\frac{1}{\omega}\right)D + \frac{\omega - 1}{\omega}D.$$

La matrice  $A$  est alors décomposée en :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\omega}D - L\right) - \left(\frac{\omega - 1}{\omega}D + U\right) \\ &= M - N, \end{aligned}$$

Ce qui donne comme méthode :  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné

$$\vec{x}^{k+1} = \left(\frac{D}{\omega} - L\right)^{-1} \left(\frac{1 - \omega}{\omega}D + U\right) \vec{x}^k + \left(\frac{D}{\omega} - L\right) \vec{b}.$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Forme composante par composante de la méthode de relaxation

La méthode de relaxation est donnée par :  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné

Pour  $i = 1$  à  $n$

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right].$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

#### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Forme composante par composante de la méthode de relaxation

La méthode de relaxation est donnée par :  $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  donné

Pour  $i = 1$  à  $n$

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right].$$

#### REMARQUE

- Ceci revient à calculer la valeur fournie par l'algorithme de GS et de faire une combinaison linéaire de cette valeur avec l'itéré précédent, ce qui constitue l'étape de relaxation.
- Ce qui donne une possibilité d'algorithme en deux étapes.

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Méthodes de relaxation

### Algorithme de relaxation

Pour  $i = 1$  à  $n$  faire :

**1** Calculer  $\tilde{x}_i^{(k+1)}$  par GS

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right].$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Méthodes de relaxation

### Algorithme de relaxation

Pour  $i = 1$  à  $n$  faire :

**1** Calculer  $\tilde{x}_i^{(k+1)}$  par GS

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right].$$

**2** relaxer cette valeur

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}).$$

## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Théorème 5 (Convergence relaxation)

Si la matrice  $A$  est symétrique et définie positive et si  $\omega$  est tel que

$$0 < \omega < 2,$$

# 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

## 3.5 Méthodes de relaxation

### Théorème 5 (Convergence relaxation)

Si la matrice  $A$  est symétrique et définie positive et si  $\omega$  est tel que

$$0 < \omega < 2,$$

Alors, la méthode de relaxation est convergente.



## 3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

### 3.5 Méthodes de relaxation

#### Théorème 5 (Convergence relaxation)

Si la matrice  $A$  est symétrique et définie positive et si  $\omega$  est tel que

$$0 < \omega < 2,$$

Alors, la méthode de relaxation est convergente.

Preuve : Exercice 1 TD5