Méthodes Numériques

L2 MIASHS

Fabien Navarro

E-mail: fabien.navarro@univ-paris1.fr

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Chapitre 3 : Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

3. Résolution des systèmes linéaires, méthodes itératives

3.0 Valeurs propres et vecteurs propres

DEFINITION (polynôme caractéristique)

Si A est une matrice carrée, alors le polynôme caractéristique de A est défini par

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Si A est de taille $n \times n$, alors p est un polynôme de degré n et par conséquent admet au plus n zéros distincts (certains potentiellement complexes).

DEFINITION (valeurs propres et vecteurs propres)

1. Si p est le polynôme caractéristique de A, alors les zéros de p sont les valeurs propres de A.
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$
2. Si λ est une valeur propre de A, et $\vec{x} \neq 0$ un vecteur vérifiant $\det(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

REMARQUE

λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Une fois qu'une valeur propre λ a été déterminée, le vecteur propre associé $\vec{x} \neq \vec{0}$ est obtenu en résolvant le système $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, i.e.,
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}.$$

EXAMPLE 1

Montrons qu'il n'existe pas de vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ non nul, tel que $A\vec{x}$ soit colinéaire à $\vec{x}$ si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.
$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$
donc, $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Le vecteur propre $\vec{x}$ associé à λ_1 doit satisfaire le système
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix_1 + x_2 \\ -x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$
i.e., $x_2 = ix_1$ et $x_1 = -ix_2$.
Ainsi, si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A, une de ses composantes et réelle et l'autre est complexe.

EXAMPLE 2 I

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs de la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est
$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] = (2-\lambda)[6 - 5\lambda + \lambda^2] \\ &= -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2, \end{aligned}$$
donc A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$ (de multiplicité deux).

EXAMPLE 2 II

Un vecteur propre $\vec{x}_1$ associé à $\lambda_1 = 3$ est solution de $(A - 3I)\vec{x}_1 = \vec{0}$,i.e.,
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
ce qui implique que $x_1 = 0$ et $x_2 = x_3$

```
A <- matrix(c(2,1,1,0,1,-1,0,2,4),3,3)
eigen(A)
```

```
## eigen() decomposition
## $values
## [1] 3 2 2
##
## $vectors
##           [,1]      [,2]       [,3]
## [1,] 0.0000000 0.0000000  0.5773503
## [2,] 0.7071068 0.8944272 -0.5773503
## [3,] 0.7071068 0.4472136 -0.5773503
```


DEFINTION (rayon spectral)

Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$$

où $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ les valeurs propres (réelles ou complexes) de A.

EXAMPLE 2 III

Comme le spectre de A (l'ensemble des valeurs propres de A) vaut $\{2, 3\}$, on a $\rho(A) = \max\{2, 3\} = 3$.

REMARQUE

- Le rayon spectral est étroitement lié à la norme d'une matrice.
- Dans la suite, nous aurons besoin de méthodes pour déterminer la distance entre deux matrices.

DEFINTION (norme matricielle)

Une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application $\|\cdot\|$ vérifiant, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|A\| \geq 0$ (positive);
2. $\|A\| = 0$, ssi $A = 0$ (définie) ;
3. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$;
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (inégalité triangulaire) ;
5. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

REMARQUE

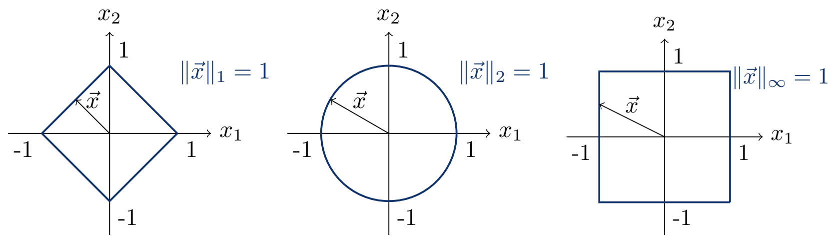
- Il s'agit donc d'une norme pour les matrices considérées comme vecteurs, qui vérifie en plus $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
- La distance entre les matrices A et B par rapport à cette norme matricielle est la suivante $\|A - B\|$.
- Les normes les plus fréquemment considérées sont induites par des normes vectorielles (e.g., ℓ_2, ℓ_∞).

DEFINTION (norme matricielle induite)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme vectorielle $\|\cdot\|$, alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x}\| = 1} \|A\vec{x}\|$$

est une norme induite.



$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

REMARQUES

1. Pour tout $\vec{z} \neq 0$, $\vec{x} = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}$ est un vecteur unitaire ($\|\vec{z}\| = 1$). Par conséquent,

$$\max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| = \max_{\vec{z}\neq 0} \left\| A\left(\frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}\right) \right\| = \max_{\vec{z}\neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|},$$

et nous pouvons écrire de manière alternative

$$\|A\| = \max_{\vec{z}\neq 0} \frac{\|A\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|}.$$

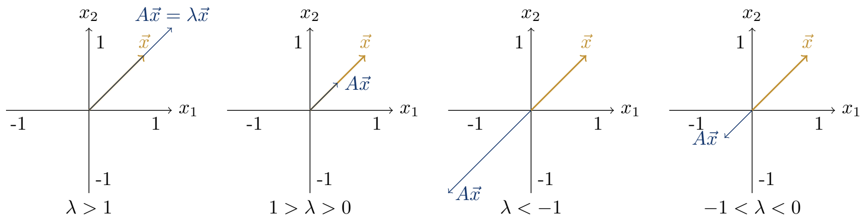
2. Pour tout $\vec{z} \neq 0$, et pour toute norme induite $\|\cdot\|$, on a

$$\|A\vec{z}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{z}\|.$$

3. La mesure donnée à une matrice sous une norme induite décrit comment la matrice "étire" les vecteurs unitaires par rapport à cette norme. L'étirement maximal est la norme de la matrice.

Si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à λ, alors $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

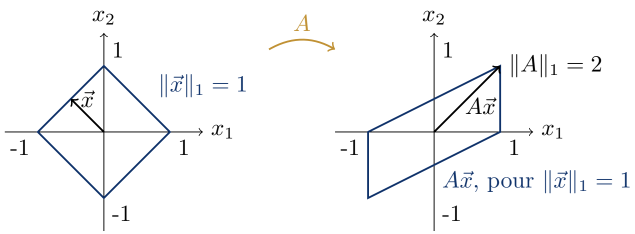
- Si λ est réel et $\lambda > 1$, alors A a pour effet d'étirer $\vec{x}$ par un facteur λ.
- Si λ est réel et $0 < \lambda < 1$, alors A a pour effet de rétrécir x par un facteur λ.
- Si $\lambda < 0$, les effets sont similaires, mais la direction de $A\vec{x}$ est inversée.



EXEMPLE 3 I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

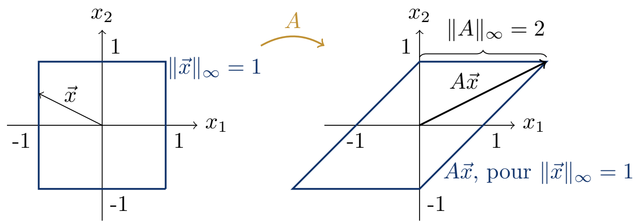
$$\|A\|_1 = \max_{\vec{x}\in\mathbb{R}^2, \|\vec{x}\|_1 = 1} \|A\vec{x}\|_1 = 2$$



EXEMPLE 3 II

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\vec{x}\in\mathbb{R}^2, \|\vec{x}\|_\infty = 1} \|A\vec{x}\|_\infty = 2$$



Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|,\\ \|A\|_2 &= \sqrt{\|A^TA\|} = \sqrt{\rho(A^TA)}\\ &= \rho(A),\ \text{si } A = A^T,\\ \|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|.\end{aligned}$$

- $\|A\|_1 =$ max de la norme-1 des colonnes ;
- $\|A\|_\infty =$ max de la norme-1 des lignes ;
- $\|A\|_2 =$ racine carrée du rayon spectrale de A^TA.

EXEMPLE 4 I

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1\le j\le n}\{|a_{1j}| + |a_{2j}| + \ldots + |a_{nj}|\}\\ &= \max\{|a_{11}|+|a_{21}|+|a_{31}|, |a_{12}|+|a_{22}|+|a_{32}|, |a_{13}|+|a_{23}|+|a_{33}|\}\\ &= \max\{|2|+|1|+|1|, |0|+|1|+|-1|, |0|+|2|+|4|\}\\ &= \max\{4, 2, 6\}\\ &= 6\end{aligned}$$


```
norm(A, "1")

## [1] 6

abs(A)

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    0    0
## [2,]    1    1    2
## [3,]    1    1    4

colSums(abs(A))

## [1] 4 2 6

max(colSums(abs(A)))

## [1] 6
```


EXEMPLE 4 II

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\\ &= \max\{|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{13}|, |a_{21}|+|a_{22}|+|a_{23}|, |a_{31}|+|a_{32}|+|a_{33}|\}\\ &= \max\{|2|+|0|+|0|, |1|+|1|+|2|, |1|+|-1|+|4|\}\\ &= \max\{2, 4, 6\}\\ &= 6\end{aligned}$$

```
norm(A, "I")
```

```
## [1] 6
```

```
abs(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    0    0
## [2,]    1    1    2
## [3,]    1    1    4
```

```
rowSums(abs(A))
```

```
## [1] 2 4 6
```

```
max(rowSums(abs(A)))
```

```
## [1] 6
```


EXEMPLE 4 III

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice : Calculer $\|A\|_2$.

```
norm(A, "2")
```

```
## [1] 4.732051
```



```
AAT <- A%*%t(A)
AAT
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    2    2
## [2,]    2    6    8
## [3,]    2    8   18
```

```
eigenAAT <- eigen(AAT)
eigenAAT$values
```

```
## [1] 22.392305  4.000000  1.607695
```

```
rhoA <- max(eigenAAT$values)
rhoA
```

```
## [1] 22.3923
```

```
normA_2 <- sqrt(rhoA)
normA_2
```

```
## [1] 4.732051
```


DÉFINITION (convergence d'une suite vectorielle)

Soit $(\vec{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ une suite vectorielle dans $\mathbb{R}^n$.

La suite $(\vec{x}^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ a pour limite $\vec{x}$ (converge vers $\vec{x}$) par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| < \varepsilon, \quad \forall k > N(\varepsilon).$$

La suite $(\vec{x}^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ converge vers $\vec{x}$ ssi

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

DÉFINITION (matrice convergente)

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est convergente si, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{ij} = 0_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}.$$

But :

On considère des méthodes itératives pour résoudre des systèmes linéaires : $A\vec{x} = \vec{b}$

Motivations

Les méthodes itératives sont efficaces :

- en terme de vitesse par rapport aux méthodes de résolutions directes.
- en terme de stockage si la matrice A est creuse (i.e., avec beaucoup de zéros).

Méthodes

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux méthodes itératives de

- Jacobi, et de
- Gauss-Seidel,

des méthodes itératives classiques (qui datent de la fin du XVIIIe siècle).

Principe :

Une méthode itérative se présente sous la forme :

- $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$ donné.
- On construit une suite de vecteurs $(\vec{x}^{(k)})_{k\geq 0}$ par un procédé itératif :

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}.$$

  où T est une matrice qui dépend de A (appelée matrice d'itération) et $\vec{c}$ un vecteur dépendant de A et de $\vec{b}$.

- avec la propriété : pour tout $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k\to\infty} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| = 0.$$

  pour une norme $\|\cdot\|$ donnée de $\mathbb{R}^n$.

Principe :

Les méthodes itératives classiques sont des variations autour d'un même thème :

1. On fixe $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
2. On décompose A sous la forme $A = M - N$, avec M inversible.

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow (M-N)\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}.$$

   i.e., (itération de Picard)

$$M\vec{x}^{(k+1)} = N\vec{x}^{(k)} + \vec{b},$$

   d'où

$$\vec{x}^{(k+1)} = M^{-1}N\vec{x}^{(k)} + M^{-1}\vec{b}.$$

   (avec $T = M^{-1}N$ et $\vec{c} = M^{-1}\vec{b}$).

Notations I

- Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- on note par D la diagonale de A

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i.e, $D_{ii} = a_{ii}$ pour $i = j$ et $D_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Notations II

- et on note par L et U les matrices triangulaires inférieure et supérieure

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i.e, $L_{ij} = -a_{ii}$ pour $i > j$ et $L_{ij} = 0$ pour $j \geq i$.
i.e, $U_{ij} = -a_{ii}$ pour $j > i$ et $U_{ij} = 0$ pour $i \geq j$.

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = D - U - L.$$


```
A <- matrix(c(2,-1,0,-1,2,-1,0,-1,2),3,3)
D <- diag(diag(A)); D
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    0    0
## [2,]    0    2    0
## [3,]    0    0    2
```

```
L <- -lower.tri(A)*A; L
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    1    0    0
## [3,]    0    1    0
```

```
U <- -upper.tri(A)*A; U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1    0
## [2,]    0    0    1
## [3,]    0    0    0
```

La méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à la décomposition suivante :

$$M = D \qquad \text{et} \qquad N = L + U.$$

(i.e., $T = M^{-1}N = D^{-1}(L+U)$ et $\vec{c} = M^{-1}\vec{b} = D^{-1}\vec{b}$)
Et si D^{-1} existe (i.e., $a_{ii} \neq 0$ pour tout i), alors, la méthode itérative associée est définie par : $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$ donné.
Pour $k \geq 0$,

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}.$$

REMARQUE

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 4

On cherche la solution de $A\vec{x} = \vec{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $b = (1, 1, 1)^T$. Le système associé

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(1 + x_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(1 + x_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

La méthode de Jacobi consiste, à chaque itération $k+1$, à résoudre chaque équation du système par rapport à l'une des variables, les autres étant fixées à leurs valeurs obtenues à l'itération précédente.

EXEMPLE 4

Le système $A\vec{x} = \vec{b}$, se réécrit sous la forme $\vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Forme composante par composante de la méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi correspond à l'équation vectorielle :

$$D\vec{x}^{(k+1)} = (L + U)\vec{x}^{(k)} + \vec{b}.$$

pour $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} -a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

i.e., $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné, pour $k \geq 0$: pour $i = 1$ à n

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1 j \neq i} a_{ij}x_j^{(k)} \right].$$

EXEMPLE 4 II

On cherche la solution de $A\vec{x} = \vec{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $b = (1, 1, 1)^T$. Le système admet une solution unique $\vec{x} = (1.5, 2.0, 1.5)^T$.

On utilise la méthode de Jacobi pour trouver des approximations $\vec{x}^{(k)}$ de $\vec{x}$ en partant de $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$ jusqu'à obtenir une précision erreur relative

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty / \|\vec{x}^{(k+1)}\|_\infty < 10^{-2}.$$

A partir de l'approximation initiale $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$, on a

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 1x_2^{(0)} + 0x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 1x_1^{(0)} + 1x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1) = 1.5 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 0x_1^{(0)} + 1x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0 + 1) = 1 \end{cases}$$

EXEMPLE 4 II

Par suite, l'approximation à la deuxième itération est donnée par

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = 1.5 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = 1.25 \end{cases}$$

...

On s'arrête après 10 itérations, car

$$\|\vec{x}^{(10)} - \vec{x}^{(9)}\|_\infty / \|\vec{x}^{(10)}\|_\infty \approx 0.007 < 10^{-2}$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	1.00	1.25	1.25	1.375	1.375	1.438	1.438	1.469	1.469	1.484
x_2	1.50	1.50	1.75	1.750	1.875	1.875	1.938	1.938	1.969	1.969
x_3	1.00	1.25	1.25	1.375	1.375	1.438	1.438	1.469	1.469	1.484

Algorithme 1 : Méthode itérative de Jacobi

Input : A, $\vec{b}$, $\vec{x}^{(0)} = \vec{x0}$; tolérance TOL; nombre maximum d'itérations N.
Output : La solution approchée $x_1, \dots, x_n$.

$k \leftarrow 1$
while $k \leq N$ **do**
  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $x_i \leftarrow \left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x0_j + b_i \right) / a_{ii}$
  end
  if $\|\vec{x} - \vec{x0}\| < TOL$ **then**
    return $(x_1, \dots, x_n)$
  end
  $k \leftarrow k + 1$
  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $x0_i \leftarrow x_i$
  end
end

Principe

- Une amélioration possible de la méthode de Jacobi consiste à prendre en comptes les composantes de $\vec{x}^{(k)}$ déjà calculées.
- En effet, les composantes de $\vec{x}^{(k)}$ sont utilisées pour calculer toutes les composantes $x_i^{(k+1)}$ de $\vec{x}^{(k+1)}$.
- Mais, pour $i > 1$, les composantes $x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}$ de $\vec{x}^{(k+1)}$ ont déjà été calculées et sont censées être de meilleures approximations des solutions $x_1, \dots, x_{i-1}$ que $x_1^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}$.
- Il semble raisonnable, alors, de calculer $x_i^{(k+1)}$ en utilisant ces dernières valeurs calculées. i.e.,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k+1)}) - \sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k)}) + b_i}{a_{ii}},$$

La méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel (GS) consiste donc à faire le choix suivant :

$$M = D - L$$
$$N = U$$
$$A = M - N,$$

$\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné, pour $k \geq 0$:

$$\vec{x}^{(k+1)} = (D-L)^{-1} U \vec{x}^{(k)} + (D-L)^{-1}\vec{b}.$$

(si $D - L$ est inversible, i.e., $a_{ii} \neq 0$ pour tout i).

Forme composante par composante de la méthode de GS

Comme

$$(D-L)\vec{x}^{(k+1)} = U\vec{x}^{(k)} + \vec{b},$$

Pour $i = 1$ à n (la ligne i)

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij}x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i.$$

En résumé, la méthode de GS est donnée par : $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
Pour $i = 1$ à n

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right].$$

REMARQUE

- En pratique les formes matricielles et composante par composante peuvent être utilisées, la formulation générale est plus utile à des fins théoriques.

EXEMPLE

A partir de $\vec{x}_0 = (1,1,1)^T$, en utilisant les composantes $x_1^{(1)}$ et $x_2^{(1)}$ on a

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 1x_2^{(0)} + 0x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1+1+0) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_1^{(1)} + 1x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1+1+1) = 1.5 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 0x_1^{(0)} + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1+0+1.5) = 1.25 \end{cases}$$

EXEMPLE

Avec GS, on s'arrête après 6 itérations, car

$$\|\vec{x}^{(6)} - \vec{x}^{(5)}\|_\infty / \|\vec{x}^{(6)}\|_\infty \approx 0.007 < 10^{-2}$$

k	1	2	3	4	5	6
x_1	1.000	1.250	1.375	1.438	1.469	1.484
x_2	1.500	1.750	1.875	1.938	1.969	1.984
x_3	1.250	1.375	1.438	1.469	1.484	1.492

REMARQUE

- On a besoin d'environ deux fois moins d'itérations que Jacobi pour obtenir la même précision.
- Il n'existe pas de résultat général permettant de montrer que GS converge plus vite que Jacobi (sauf pour certaines matrices particulières).

Analyses des méthodes itératives

Pour étudier la convergence des méthodes itératives on considère la formulation :

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

où $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné.

La relation entre norme induite et rayon spectral fourni un résultat permettant l'analyse de la convergence des méthodes itératives.

REMARQUES

- Au Chapitre 1, nous avons étudié des méthodes itératives pour trouver les racines de $f(x) = 0$ ou les points fixes de $x = g(x)$.
- Dans ce contexte, la convergence nécessite que $|g'(x)| < 1$.
- Nous étudions maintenant une extension de l'analyse aux systèmes linéaires en n dimensions ($\vec{x} = g(\vec{x}) = T\vec{x} + \vec{c}$, avec $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).

Théorème 0 (approximation du rayon spectral par une norme subordonnée)

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme subordonnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors, on a toujours

$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(ii) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$,
il existe au moins une norme induite $\|\cdot\|$ tel que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

PREUVE

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A et $\vec{x}$ un vecteur propre associé, alors $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. On a

$$\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|x\| = \|A\vec{x}\| \leq \|A\|\|\vec{x}\|.$$

On en déduit que toute valeur propre λ vérifie $|\lambda| \leq \|A\|$ et donc

$$\rho(A) = \max_i(|\lambda_i|) \leq \|A\|.$$

(ii) admis.

Le résultat suivant donne un critère fondamental de convergence d'une méthode itérative.

Théorème 1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La méthode itérative : $\vec{x}_0$ donné dans $\mathbb{R}^n$,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

est convergente.

(ii) $\rho(T) < 1$.

(iii) Il existe au moins une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ tq

$$\|T\| < 1.$$

PREUVE

$(i) \Rightarrow (ii)$ $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$. Or,

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x} &= T\vec{x}^{(k)} + \cancel{\vec{c}} - T\vec{x} - \cancel{\vec{c}} = T(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}) \\ \vec{e}^{(k+1)} &= T\vec{e}^{(k)} \end{aligned}$$

i.e., $\vec{e}^{(k+1)} = T\vec{e}^{(k)}, \forall k \geq 0$. Donc $\vec{e}^{(k)} = T^k\vec{e}^{(0)}$.

On a (Exercice 5 TD0), pour tout $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$

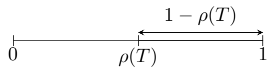
$$\lim_{k\to\infty} T^k\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow \rho(T) < 1.$$

PREUVE

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit $\rho(T) < 1$. D'après Th0(ii) : $\exists \,\|\cdot\|$ tq $\|T\| \leq \rho(T) + \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = (1 - \rho(T))/2$, on a

$$\rho(T) + \varepsilon < 1,$$



et par suite $\|T\| < 1$.

PREUVE

$(iii) \Rightarrow (i)$ TD0 Exercice 5 : Si $\|T\| < 1$, alors $\lim_{k\to\infty} T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Or, $\vec{e}^{(k)} = T^k\vec{e}^{(0)}$. Par conséquent,

$$\lim_{k\to\infty} \vec{e}^{(k)} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x},$$

i.e., la méthode est convergente.

Corrollaire

Dans le cas où $A = M - N$ et $T = M^{-1}N$,
La méthode itérative : $\vec{x}_0$ donné dans $\mathbb{R}^n$,

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

est convergente ssi

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

Question : conditions suffisante(s) sur M et N pour avoir $\rho(M^{-1}N) < 1$?

Théorème 2

Soit A une matrice symétrique et définie positive. On suppose que A se décompose en

$$A = M - N.$$

Si la matrice $M^T + N$ est définie positive, Alors,

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

PREUVE I

On cherche a montrer que : si $M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y}$ avec $\vec{y}$ vecteur propre ($\neq 0$) associé à λ, alors $|\lambda| < 1$.

On a,

$$\begin{aligned} M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y} &\Rightarrow N\vec{y} = \lambda M\vec{y} \\ &\Rightarrow M\vec{y} - N\vec{y} = M\vec{y} - \lambda M\vec{y} \\ &\Rightarrow (M-N)\vec{y} = M\vec{y}(1-\lambda) \\ &\Rightarrow \vec{y}^T A\vec{y} = (1-\lambda)\vec{y}^T M\vec{y} \end{aligned}$$

Or A est définie positive, donc

$$(1-\lambda)\vec{y}^T M\vec{y} > 0.$$

PREUVE II

De plus, comme $N\vec{y} = \lambda M\vec{y}$ on a

$$(M^T + N)\vec{y} = M^T\vec{y} + N\vec{y} = M^T\vec{y} + \lambda M\vec{y}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \vec{y}^T(M^T + N)\vec{y} &= \vec{y}^T M^T\vec{y} + \lambda\vec{y}^T M\vec{y} \\ &= (1+\lambda)\vec{y}^T M\vec{y}. \end{aligned}$$

Or $M^T + N$ est définie positive, donc

$$(1+\lambda)\vec{y}^T M\vec{y} > 0.$$

Donc, $(1-\lambda)/(1+\lambda) > 0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)(1+\lambda) > 0 \;\Rightarrow\; 1-\lambda^2 > 0$, i.e., $|\lambda| < 1$.

DÉFINITION

Une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est dite à diagonale strictement dominante si pour tout $i = 1$ à n, on a

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|.$$

EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 2 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |-5| > |2| + |1| \\ |10| > |7| + |2| \\ |11| > |5| + |5| \end{array}$$

Remarque

- Une matrice A à diagonale strictement dominante est toujours inversible.

Théorème 3 (Convergence Jacobi)

Si A est une matrice symétrique et à diagonale strictement dominante.

Alors, la méthode de Jacobi est convergente.

Preuve : Exercice 1 TD5

Théorème 4 (Convergence Gauss-Seidel)

Si la matrice A est symétrique et définie positive,

Alors, la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Preuve : Exercice 1 TD5

Accélération de convergence

- La vitesse de convergence d'une méthode itérative dépend du rayon spectral de la matrice associée à la méthode.
- Une façon de sélectionner une procédure pour accélérer la convergence est de choisir une méthode dont la matrice associée a un rayon spectral minimal.

Méthodes de relaxation

On introduit un paramètre ω réel non nul, puis on écrit:

$$D = (\frac{1}{\omega})D + \frac{\omega - 1}{\omega}D.$$

La matrice A est alors décomposée en :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\omega}D - L\right) - \left(\frac{\omega - 1}{\omega}D + U\right) \\ &= M - N, \end{aligned}$$

Ce qui donne comme méthode : $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné

$$\vec{x}^{k+1} = \left(\frac{D}{\omega} - L\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right)\vec{x}^k + \left(\frac{D}{\omega} - L\right)\vec{b}.$$

Forme composante par composante de la méthode de relaxation

La méthode de relaxation est donnée par : $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
Pour $i = 1$ à n

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right].$$

REMARQUE

- Ceci revient à calculer la valeur fournie par l'algorithme de GS et de faire une combinaison linéaire de cette valeur avec l'itéré précédent, ce qui constitue l'étape de relaxation.
- Ce qui donne une possibilité d'algorithme en deux étapes.

Algorithme de relaxation

Pour $i = 1$ à n faire :

1. Calculer ${\tilde{x}_i}^{(k+1)}$ par GS

$$ {\tilde{x}_i}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right].$$

2. relaxer cette valeur

$$ {x_i}^{(k+1)} = {x_i}^{(k)} + \omega({\tilde{x}_i}^{(k+1)} - {x_i}^{(k)}).$$

Théorème 5 (Convergence relaxation)

Si la matrice A est symétrique et définie positive et si ω est tel que

$$0 < \omega < 2,$$

Alors, la méthode de relaxation est convergente.

Preuve : Exercice 1 TD5