Méthodes Numériques

L2 MIASHS

Fabien Navarro

E-mail: fabien.navarro@univ-paris1.fr

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

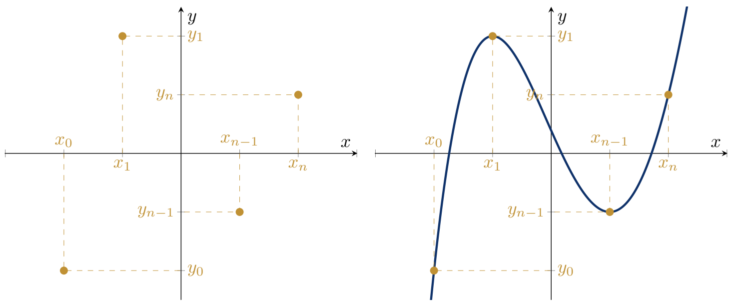
Chapitre 4 : Interpolation et approximation polynomiale

4. Interpolation et approximation polynomiale

4.1 Introduction

But

Soit $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$, $n+1$ points du plan, où les x_i sont deux à deux distincts.



Le but est de trouver une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui passe par ces points, *i.e.*

$$\boxed{f(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \ldots n.}$$

i.e., trouver l'expression d'une fonction qui serait représentée par une telle courbe.
Il s'agit d'un problème d'interpolation.

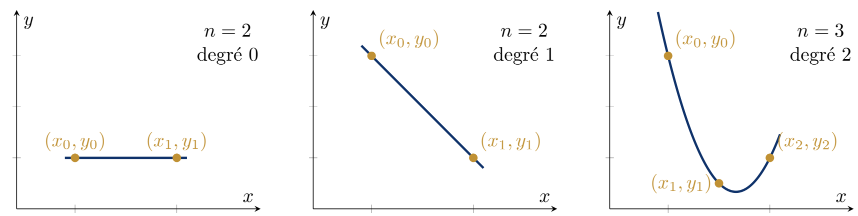
4. Interpolation et approximation polynomiale

4.1 Introduction

Approche

On envisage d'utiliser des fonctions polynomiales. Construire un polynôme P_n, de degré au plus n (*i.e.,* $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$) qui vérifie

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$



Question: Existe-t-il une fonction polynômiale de degré au plus n permettant d'atteindre ce but ?

4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Introduction

Outils

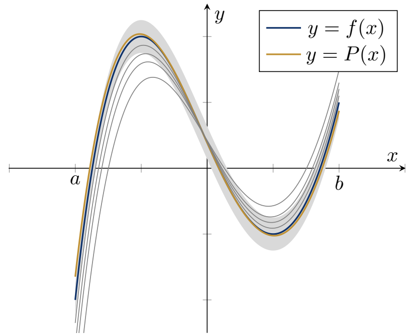
- Le théorème d'approximation de Weierstrass est à la base de l'approximation polynomiale.
- Les polynômes de Lagrange permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points (en gérant les points un par par).

4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Introduction

Théorème d'approximation de Weierstrass (1885)

Soit $f \in C[a,b]$. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists$ un polynôme P, à coefficients réels tel que :

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$



4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Introduction

REMARQUES

- La borne est uniforme, *i.e.,* elle est valable pour tout x dans l'intervalle.
- Le théorème ne dit rien sur la façon de trouver le polynôme, ni sur son degré !
- Il garantit que nous pouvons trouver un polynôme qui s'insère dans la zone autour de la fonction f, quelle que soit son épaisseur.
- Une raison importante de considérer la classe des polynômes dans l'approximation des fonctions continues est que la dérivée et la primitive d'un polynôme sont faciles à déterminer (également des polynômes).
- Question : (Nos amis) les polynômes de Taylor, sont-ils de bons candidats pour l'interpolation polynomiale ?
- Un bon polynôme d'interpolation doit fournir une approximation relativement précise sur un intervalle, ce qui n'est généralement pas le cas des polynômes de Taylor qui fournissent une approximation locale.

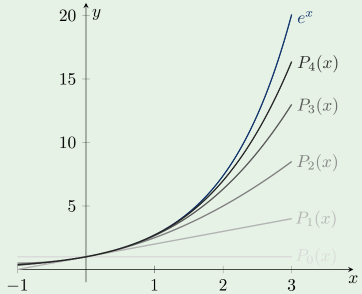
4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Introduction

EXEMPLE

Approximation de Taylor de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$.

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

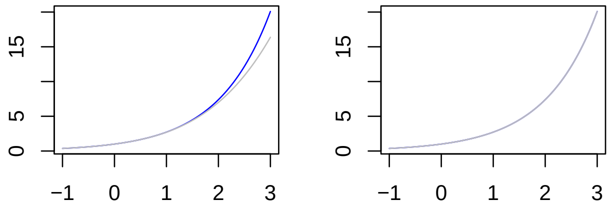
i.e., $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$, $P_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6, \ldots$



L'approximation est bonne en x_0, mais se dégrade lorsque l'on s'en éloigne.

4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Introduction

```r
f <- function(x){exp(x)}
Pn <- function(x, n){
  sapply(x, function(xi) sum(xi^(0:n)/factorial(0:n)))}
x <- seq(-1,3,length.out=100)
curve(f,-1,3,col="blue");lines(x,Pn(x,4),col="gray")
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,4))^2))
#> [1] 9.492025
curve(f,-1,3,col="blue");lines(x,Pn(x,20),col="gray")
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,20))^2))
#> [1] 3.561652e-10
```



Bien que l'approximation soit meilleure avec des polynômes de Taylor de degré supérieur, ce n'est pas le cas pour toutes les fonctions !

4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Introduction

EXEMPLE

Approximation de Taylor de $f(x) = 1/x$ en $x_0 = 1$.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k.$$

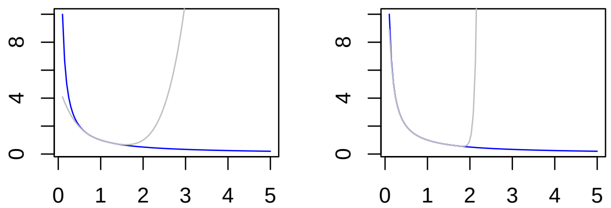
Si l'on approche $f(3) = 1/3$ par $P_n(3)$ pour des valeurs croissantes de n, on obtient

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85	171	-341	683

Ici, la série de Taylor ne converge que lorsque $|x-1| < 1$ (et $3 \notin]0,2[$).

4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Introduction

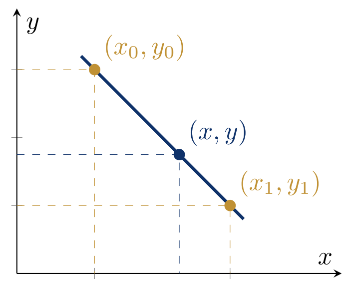
```r
f <- function(x){1/x}
Pn <- function(x, n){
  k <- 0:n; sapply(x, function(xi) sum((-1)^k*(xi-1)^k))}
x <- seq(0.1,5,length.out=100)
curve(f,0.1,5,col="blue");lines(x,Pn(x,4),col="gray")
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,4))^2))
#> [1] 616.9402
curve(f,0.1,5,col="blue");lines(x,Pn(x,20),col="gray")
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,20))^2))
#> [1] 1.388896e+12
```



4. Interpolation et approximation polynomiale
4.1 Interpolation de Lagrange

Polynôme d'interpolation linéaire

Le problème de la détermination d'un polynôme de degré (au plus) un qui passe par les points distincts (x_0, y_0) et (x_1, y_1) revient à approcher une fonction f pour laquelle $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$ au moyen d'un polynôme de degré degré 1 interpolant les valeurs de f aux points x considérés.



L'utilisation de ce polynôme de degré 1 pour une approximation dans un intervalle $[x_0, x_1]$ est appelée interpolation linéaire.

Polynôme d'interpolation linéaire

Pour une valeur x dans l'intervalle $[x_0, x_1]$, la valeur y le long de la droite vérifie l'équation (d'égalité des pentes des droites qui passent par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1))

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

En résolvant pour y, on obtient

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_0(x_1 - x_0) + y_1(x - x_0) - y_0(x - x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \end{aligned}$$

Interpolation de Lagrange linéaire

Soient

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Le polynôme linéaire d'interpolation de Lagrange passant par (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est

$$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1.$$

où

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= 1, \quad L_0(x_1) = 0, \\ L_1(x_0) &= 0, \quad L_1(x_1) = 1 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} P(x_0) &= 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 = y_0, \\ P(x_1) &= 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 = y_1. \end{aligned}$$

Donc P est l'unique polynôme de degré au plus 1 qui passe par (x_0, y_0) et (x_1, y_1).

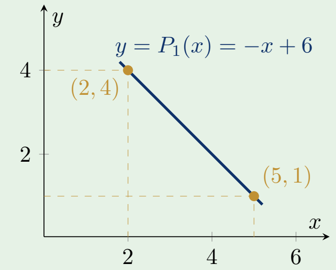
EXEMPLE

Polynôme d'interpolation de Lagrange linéaire qui passe par les points $(2, 4)$ et $(5, 1)$.
On a

$$L_0(x) = \frac{x - 5}{2 - 5} = -\frac{1}{3}(x - 5), \quad L_1(x) = \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{1}{3}(x - 2).$$

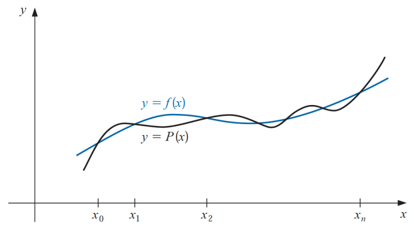
Donc

$$P_1(x) = \frac{1}{3}(x - 2) \cdot 4 + \frac{1}{3}(x - 2) \cdot 1 = -x + 6.$$



Interpolation de Lagrange I

Pour généraliser le concept d'interpolation linéaire, considérons la construction d'un polynôme de degré au plus n qui passe par les $n + 1$ points $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$



Dans ce cas, on construit, pour chaque $i = 0, \ldots, n$ une fonction $L_i(x)$ telle que $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$ et $L_i(x_i) = 1$.

Pour satisfaire $L_i(x_j) = 0, \forall j \neq i$, le numérateur de $L_i(x)$ doit contenir le terme

$$(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n).$$

Interpolation de Lagrange II

Pour satisfaire $L_i(x_i) = 1$, le dénominateur de $L_i(x)$ doit être le même terme mais évalué en $x = x_i$.

Ainsi

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Le polynôme d'interpolation est facilement décrit une fois que la forme de L_i est connue.

DÉFINITION

Pour tout $i = 0, \dots, n$, on définit le ième polynôme de Lagrange élémentaire, par

- $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ (poly de degré $\leq n$) ;
- $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$,
  i.e., $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, x_j est racine de L_i pour $i \neq j$.

Théorème 1

Soit $x_0, \dots, x_n$, $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$.

Alors, pour tout $i = 0, \dots, n$

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}.$$

PREUVE

Comme, pour tout $j = 0, \dots, n, j \neq i$, x_j est racine de L_i, il s'écrit

$$L_i(x) = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j).$$

Pour déterminer α, on utilise le fait que $L_i(x_i) = 1$

$$1 = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \Rightarrow L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}.$$

PROPOSITION

La famille $\{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $R_n[X]$.

PREUVE

Supposons que

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j = 0.$$

On a, pour tout j,

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j(x_i) = 0,$$

d'où $\alpha_j = 0$.
La famille $\{L_0, \ldots, L_n\}$ est libre et puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question : Comment construire un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \ldots, n$?

Théorème 2

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et soit $x_0, \ldots, x_n$, $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$.

Alors, $\exists$ un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \ldots, n.$$

De plus,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x).$$

PREUVE (existence)

Comme $\{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $R_n[X]$, et puisque $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(x).$$

Or, $P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \ldots, n$, par suite

$$f(x_i) = P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(x_i) = \alpha_i$$

Donc,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x).$$

PREUVE (unicité)

Supposons qu'il existe P_n et Q_n deux éléments de $R_n[X]$ tel que, $\forall i = 0, \ldots, n$

$$P_n(x_i) = f(x_i), Q_n(x_i) = f(x_i).$$

Posons $D_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$, $D_n \in R_n[X]$. On a

$$D_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0, \forall i = 0, \ldots, n$$

DÉFINITION

Le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x),$$

est le n-ième polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, \ldots, x_n$, ces points sont appelés *noeuds*.

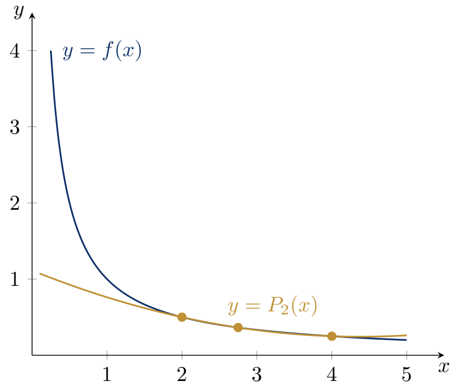
EXEMPLE

$n = 2$, $x_0 = 2, x_1 = 2.75$ et $x_2 = 4$, avec $f(x) = 1/x$.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4),$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4),$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75).$$

On a $f(x_0) = f(2) = 1/2, f(x_1) = f(2.75) = 4/11$ et $f(x_2) = f(4) = 1/4$, donc

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}.$$



En dehors de $[2, 4]$, P_n peut présenter des écarts importants par rapport f.

Question : Quelle est l'erreur commise en remplaçant f par P_n ?

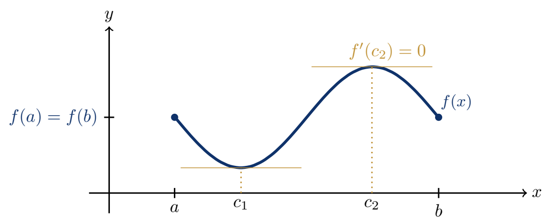
Par exemple, une approximation de $f(3) = 1/3$ est donnée par

$$f(3) \approx P_2(3) = \frac{29}{88} \approx 0.3295.$$

Théorème de Rolle

Supposons que $f \in C[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

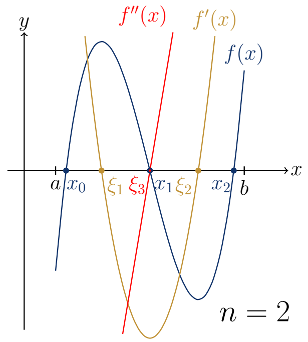


4. Interpolation et approximation polynomiale
4.2 Interpolation de Lagrange

Théorème de Rolle généralisé

Supposons que $f \in C[a, b]$ et que f est n fois dérivable sur $]a, b[$.

Si f s'annule aux $(n+1)$ points distincts $x_0, \dots, x_n$ dans $[a, b]$, alors il existe un réel $\xi \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.



4. Interpolation et approximation polynomiale
4.2 Interpolation de Lagrange

Théorème 3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} et soit $x_0, \dots, x_n$, $(n+1)$ noeuds distincts de $[a, b]$.

Alors, pour tout $x \in [a, b], \exists \xi_x \in]a, b[$ (un nombre généralement inconnu) tel que :

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

En particulier, si $M_n = \max_{y \in [a,b]}\{|f^{(n+1)}(y)|\}$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|.$$

4. Interpolation et approximation polynomiale
4.2 Interpolation de Lagrange

REMARQUES

- Le Th3 fourni une borne de l'erreur impliquée dans l'approximation d'une fonction par un polynôme d'interpolation.
- Il s'agit d'un résultat théorique important car les polynômes de Lagrange sont largement utilisés pour dériver des méthodes de différenciation et d'intégration numériques.
- Les bornes d'erreur pour ces méthodes sont obtenues à partir de ce résultat.
- La borne n'implique pas la convergence de P_n vers f !
- Augmenter n n'améliore pas nécessairement la qualité de l'approximation.

4. Interpolation et approximation polynomiale
4.2 Interpolation de Lagrange

REMARQUES

- On remarque que la forme de l'erreur pour le polynôme de Lagrange est assez similaire à celle du polynôme de Taylor.

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

- Cependant, toute l'information utilisée dans l'approximation est concentrée sur un seul point x_0, alors qu'un "bon" polynôme d'interpolation doit fournir une approximation relativement précise sur un intervalle entier.
- L'erreur d'approximation d'une fonction f par son polynôme d'interpolation de Lagrange P_n en tout point x de l'intervalle d'interpolation s'écrit

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

EXEMPLE

Déterminons l'erreur maximale dans l'exemple précédent lorsque l'on utilise $P_2(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$ pour approcher $f(x) = 1/x$ sur $[a,b] = [2,4]$.

On a $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$ et $f'''(x) = -6x^{-4}$.

Ainsi, le terme d'erreur de P_2 est de la forme

$$\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-2)(x-2.75)(x-4), \quad \text{pour} \quad \xi_x \in]2,4[.$$

La fonction $|f'''(x)| = 6x^{-4}$ est maximale lorsque $x = 2$ ($|f'''| \searrow$ sur $[2,4]$), *i.e.*,

$$\max_{\xi_x \in [2,4]} |f'''(\xi_x)| = \frac{6}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

EXEMPLE

On détermine la valeur maximale sur cet intervalle de la valeur absolue du polynôme:

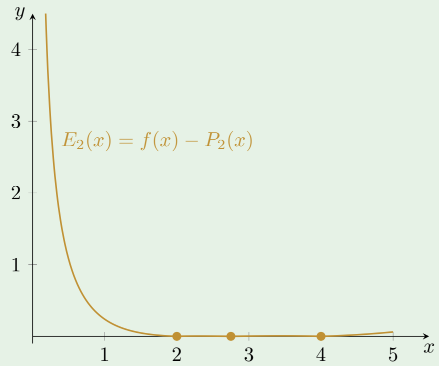
$$g(x) = (x-2)(x-2.75)(x-4).$$

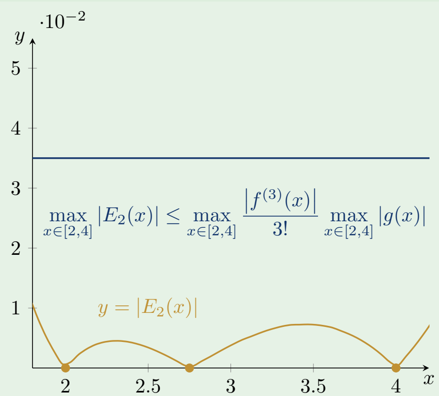
Comme $g'(x) = \frac{1}{2}(3x-7)(2x-7)$, les points critiques sont $x = 7/3$ et $x = 7/2$, $g(7/3) = 25/108 \approx 0.23$ et $g(7/2) = -9/16 \approx 0.56$.

Ainsi,

$$\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \leq \frac{3}{8 \cdot 6}|-9/16| = 9/256 \approx 0.035.$$

EXEMPLE





EXEMPLE (phénomène de Runge, 1901)