

# Méthodes Numériques

L2 MIAHS

**Fabien Navarro**

E-mail: [fabien.navarro@univ-paris1.fr](mailto:fabien.navarro@univ-paris1.fr)



# Chapitre 4 : Interpolation et approximation polynomiale

## 1 4.1 Introduction

## 2 4.2 Interpolation de Lagrange

# Chapitre 4 : Interpolation et approximation polynomiale

## 1 4.1 Introduction

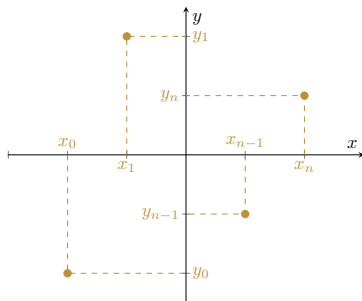
## 2 4.2 Interpolation de Lagrange

# 4. Interpolation et approximation polynomiale

## 4.1 Introduction

But

Soit  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n, n + 1$  points du plan, où les  $x_i$  sont deux à deux **distincts**.

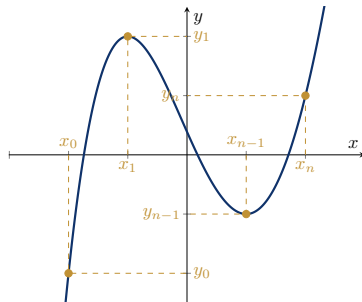


## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### But

Soit  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n, n + 1$  points du plan, où les  $x_i$  sont deux à deux **distincts**.



Le but est de trouver une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui passe par ces points, *i.e.*

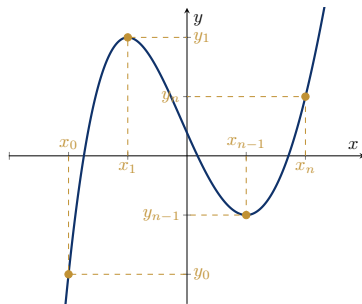
$$f(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### But

Soit  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n, n + 1$  points du plan, où les  $x_i$  sont deux à deux **distincts**.



Le but est de trouver une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui passe par ces points, *i.e.*

$$f(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

*i.e.*, trouver l'expression d'une fonction qui serait représentée par une telle courbe.  
Il s'agit d'un **problème d'interpolation**.

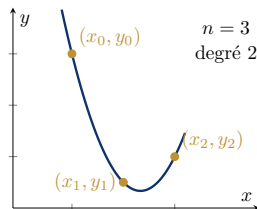
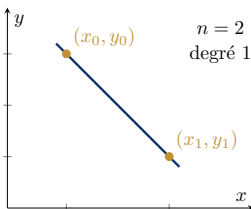
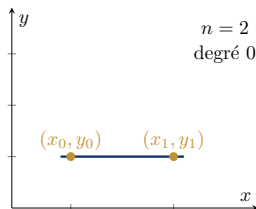
# 4. Interpolation et approximation polynomiale

## 4.1 Introduction

### Approche

On envisage d'utiliser des fonctions polynomiales. Construire un polynôme  $P_n$ , de degré **au plus**  $n$  (i.e.,  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ ) qui vérifie

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$



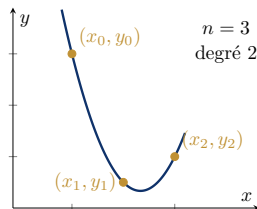
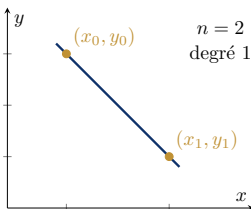
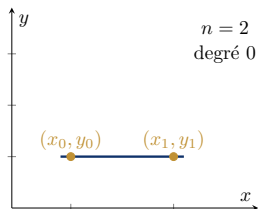
## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### Approche

On envisage d'utiliser des fonctions polynomiales. Construire un polynôme  $P_n$ , de degré au plus  $n$  (i.e.,  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ ) qui vérifie

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$



**Question:** Existe-t-il une fonction polynômiale de degré au plus  $n$  permettant d'atteindre ce but ?



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### Outils

- Le **théorème d'approximation de Weierstrass** est à la base de l'approximation polynomiale.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### Outils

- Le **théorème d'approximation de Weierstrass** est à la base de l'approximation polynomiale.
- Les **polynômes de Lagrange** permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points (en gérant les points un par par).

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

Théorème d'approximation de Weierstrass (1885)

Soit  $f \in C[a, b]$ .

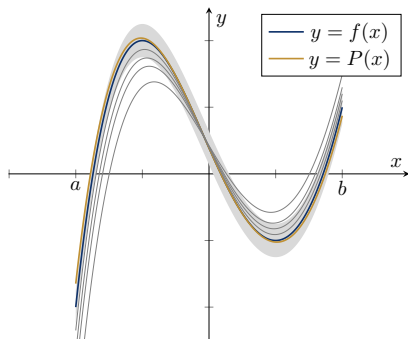
## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### Théorème d'approximation de Weierstrass (1885)

Soit  $f \in C[a, b]$ . Alors,  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  un polynôme  $P$ , à coefficients réels tel que :

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### REMARQUES

- La borne est **uniforme**, *i.e.*, elle est valable pour tout  $x$  dans l'intervalle.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### REMARQUES

- La borne est **uniforme**, *i.e.*, elle est valable pour tout  $x$  dans l'intervalle.
- Le théorème ne dit rien sur la façon de trouver le polynôme, ni sur son degré !

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### REMARQUES

- La borne est **uniforme**, *i.e.*, elle est valable pour tout  $x$  dans l'intervalle.
- Le théorème ne dit rien sur la façon de trouver le polynôme, ni sur son degré !
- Il garantit que nous pouvons trouver un polynôme qui s'insère dans la zone autour de la fonction  $f$ , quelle que soit son épaisseur.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### REMARQUES

- La borne est **uniforme**, *i.e.*, elle est valable pour tout  $x$  dans l'intervalle.
- Le théorème ne dit rien sur la façon de trouver le polynôme, ni sur son degré !
- Il garantit que nous pouvons trouver un polynôme qui s'insère dans la zone autour de la fonction  $f$ , quelle que soit son épaisseur.
- Une raison importante de considérer la classe des polynômes dans l'approximation des fonctions continues est que la dérivée et la primitive d'un polynôme sont faciles à déterminer (également des polynômes).



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### REMARQUES

- La borne est **uniforme**, *i.e.*, elle est valable pour tout  $x$  dans l'intervalle.
- Le théorème ne dit rien sur la façon de trouver le polynôme, ni sur son degré !
- Il garantit que nous pouvons trouver un polynôme qui s'insère dans la zone autour de la fonction  $f$ , quelle que soit son épaisseur.
- Une raison importante de considérer la classe des polynômes dans l'approximation des fonctions continues est que la dérivée et la primitive d'un polynôme sont faciles à déterminer (également des polynômes).
- **Question** : (Nos amis) les polynômes de Taylor, sont-ils de bons candidats pour l'interpolation polynomiale ?

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### REMARQUES

- La borne est **uniforme**, *i.e.*, elle est valable pour tout  $x$  dans l'intervalle.
- Le théorème ne dit rien sur la façon de trouver le polynôme, ni sur son degré !
- Il garantit que nous pouvons trouver un polynôme qui s'insère dans la zone autour de la fonction  $f$ , quelle que soit son épaisseur.
- Une raison importante de considérer la classe des polynômes dans l'approximation des fonctions continues est que la dérivée et la primitive d'un polynôme sont faciles à déterminer (également des polynômes).
- **Question** : (Nos amis) les polynômes de Taylor, sont-ils de bons candidats pour l'interpolation polynomiale ?
- Un bon polynôme d'interpolation doit fournir une approximation relativement précise sur un intervalle, ce qui n'est généralement pas le cas des polynômes de Taylor qui fournissent une **approximation locale**.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### EXEMPLE

Approximation de Taylor de  $f(x) = e^x$  en  $x_0 = 0$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### EXEMPLE

Approximation de Taylor de  $f(x) = e^x$  en  $x_0 = 0$ .

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

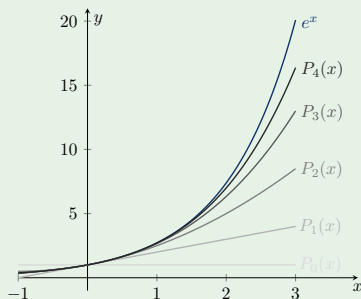
### 4.1 Introduction

#### EXEMPLE

Approximation de Taylor de  $f(x) = e^x$  en  $x_0 = 0$ .

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k.$$

i.e.,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = 1 + x$ ,  $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$ ,  $P_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6, \dots$

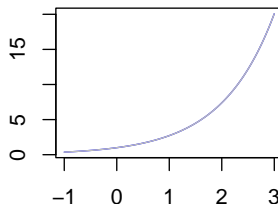
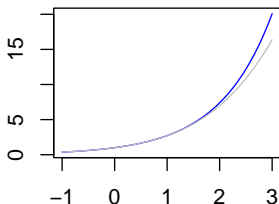


L'approximation est bonne en  $x_0$ , mais se dégrade lorsque l'on s'en éloigne.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

```
f <- function(x) {exp(x)}  
Pn <- function(x, n) {  
  sapply(x, function(xi) sum(xi^(0:n)/factorial(0:n))) }  
x <- seq(-1,3,length.out=100)  
curve(f,-1,3,col="blue");lines(x,Pn(x,4),col="gray")  
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,4)) ^2))  
#> [1] 9.492025  
curve(f,-1,3,col="blue");lines(x,Pn(x,20),col="gray")  
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,20)) ^2))  
#> [1] 3.561652e-10
```



Bien que l'approximation soit meilleure avec des polynômes de Taylor de degré supérieur, ce n'est pas le cas pour toutes les fonctions !

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### EXEMPLE

Approximation de Taylor de  $f(x) = 1/x$  en  $x_0 = 1$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### EXEMPLE

Approximation de Taylor de  $f(x) = 1/x$  en  $x_0 = 1$ .

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k.$$



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### EXEMPLE

Approximation de Taylor de  $f(x) = 1/x$  en  $x_0 = 1$ .

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k.$$

Si l'on approche  $f(3) = 1/3$  par  $P_n(3)$  pour des valeurs croissantes de  $n$ , on obtient

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85	171	-341	683

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

#### EXEMPLE

Approximation de Taylor de  $f(x) = 1/x$  en  $x_0 = 1$ .

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k.$$

Si l'on approche  $f(3) = 1/3$  par  $P_n(3)$  pour des valeurs croissantes de  $n$ , on obtient

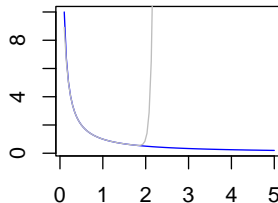
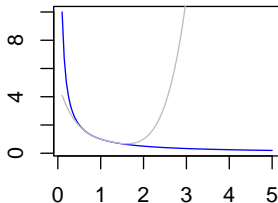
$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85	171	-341	683

Ici, la série de Taylor ne converge que lorsque  $|x-1| < 1$  (et  $3 \notin ]0, 2[$ ).

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Introduction

```
f <- function(x) {1/x}
Pn <- function(x, n) {
  k <- 0:n; sapply(x, function(xi) sum((-1)^k*(xi-1)^k))}
x <- seq(0.1,5,length.out=100)
curve(f,0.1,5,col="blue");lines(x,Pn(x,4),col="gray")
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,4))^2))
#> [1] 616.9402
curve(f,0.1,5,col="blue");lines(x,Pn(x,20),col="gray")
sqrt(sum( (f(x)-Pn(x,20))^2))
#> [1] 1.388896e+12
```



# Chapitre 4 : Interpolation et approximation polynomiale

## 1 4.1 Introduction

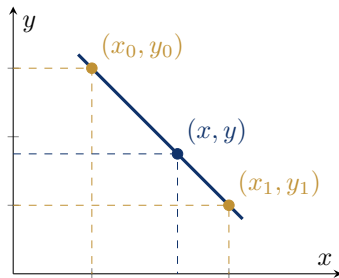
## 2 4.2 Interpolation de Lagrange

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Interpolation de Lagrange

#### Polynôme d'interpolation linéaire

Le problème de la détermination d'un polynôme de degré (au plus) un qui passe par les points distincts  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$  revient à approcher une fonction  $f$  pour laquelle  $f(x_0) = y_0$  et  $f(x_1) = y_1$  au moyen d'un polynôme de degré 1 interpolant les valeurs de  $f$  aux points  $x$  considérés.

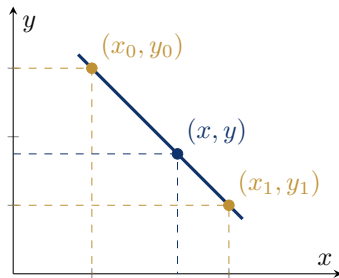


## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Interpolation de Lagrange

#### Polynôme d'interpolation linéaire

Le problème de la détermination d'un polynôme de degré (au plus) un qui passe par les points distincts  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$  revient à approcher une fonction  $f$  pour laquelle  $f(x_0) = y_0$  et  $f(x_1) = y_1$  au moyen d'un polynôme de degré 1 interpolant les valeurs de  $f$  aux points  $x$  considérés.



L'utilisation de ce polynôme de degré 1 pour une approximation dans un intervalle  $[x_0, x_1]$  est appelée **interpolation linéaire**.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Interpolation de Lagrange

#### Polynôme d'interpolation linéaire

Pour une valeur  $x$  dans l'intervalle  $[x_0, x_1]$ , la valeur  $y$  le long de la droite vérifie l'équation (d'égalité des pentes des droites qui passent par les points  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$ )

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.1 Interpolation de Lagrange

#### Polynôme d'interpolation linéaire

Pour une valeur  $x$  dans l'intervalle  $[x_0, x_1]$ , la valeur  $y$  le long de la droite vérifie l'équation (d'égalité des pentes des droites qui passent par les points  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$ )

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

En résolvant pour  $y$ , on obtient

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_0(x_1 - x_0) + y_1(x - x_0) - y_0(x - x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \end{aligned}$$



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Interpolation de Lagrange linéaire

Soient

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Interpolation de Lagrange linéaire

Soient

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Le polynôme linéaire d'interpolation de Lagrange passant par  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$  est

$$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1.$$

où

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= 1, & L_0(x_1) &= 0, \\ L_1(x_0) &= 0, & L_1(x_1) &= 1 \end{aligned}$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Interpolation de Lagrange linéaire

Soient

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Le polynôme linéaire d'interpolation de Lagrange passant par  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$  est

$$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1.$$

où

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= 1, & L_0(x_1) &= 0, \\ L_1(x_0) &= 0, & L_1(x_1) &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} P(x_0) &= 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 = y_0, \\ P(x_1) &= 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 = y_1. \end{aligned}$$

Donc  $P$  est l'unique polynôme de degré au plus 1 qui passe par  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

Polynôme d'interpolation de Lagrange linéaire qui passe par les points  $(2, 4)$  et  $(5, 1)$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

Polynôme d'interpolation de Lagrange linéaire qui passe par les points  $(2, 4)$  et  $(5, 1)$ .  
On a

$$L_0(x) = \frac{x - 5}{2 - 5} = -\frac{1}{3}(x - 5), \quad L_1(x) = \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{1}{3}(x - 2).$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

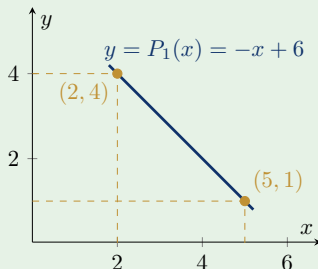
Polynôme d'interpolation de Lagrange linéaire qui passe par les points  $(2, 4)$  et  $(5, 1)$ .

On a

$$L_0(x) = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5), \quad L_1(x) = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2).$$

Donc

$$P_1(x) = \frac{1}{3}(x-2) \cdot 4 + \frac{1}{3}(x-2) \cdot 1 = -x + 6.$$

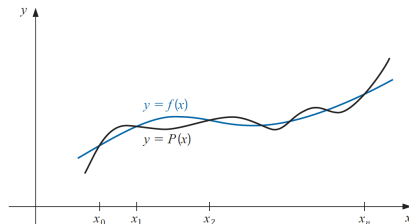


# 4. Interpolation et approximation polynomiale

## 4.2 Interpolation de Lagrange

### Interpolation de Lagrange I

Pour généraliser le concept d'interpolation linéaire, considérons la construction d'un polynôme de degré au plus  $n$  qui passe par les  $n + 1$  points  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$

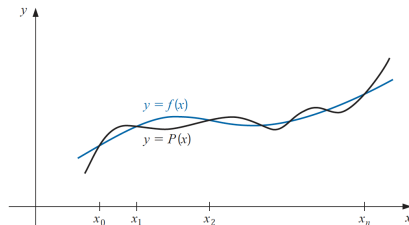


## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Interpolation de Lagrange I

Pour généraliser le concept d'interpolation linéaire, considérons la construction d'un polynôme de degré au plus  $n$  qui passe par les  $n + 1$  points  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$



Dans ce cas, on construit, pour chaque  $i = 0, \dots, n$  une fonction  $L_i(x)$  telle que  $L_i(x_j) = 0$  si  $j \neq i$  et  $L_i(x_i) = 1$ .

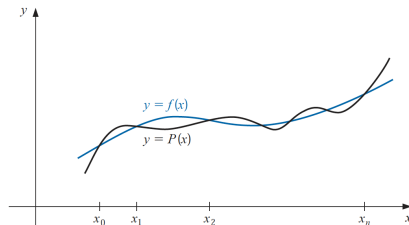


## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Interpolation de Lagrange I

Pour généraliser le concept d'interpolation linéaire, considérons la construction d'un polynôme de degré au plus  $n$  qui passe par les  $n + 1$  points  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$



Dans ce cas, on construit, pour chaque  $i = 0, \dots, n$  une fonction  $L_i(x)$  telle que  $L_i(x_j) = 0$  si  $j \neq i$  et  $L_i(x_i) = 1$ .

Pour satisfaire  $L_i(x_j) = 0, \forall j \neq i$ , le numérateur de  $L_i(x)$  doit contenir le terme

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n).$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Interpolation de Lagrange II

Pour satisfaire  $L_i(x_i) = 1$ , le dénominateur de  $L_i(x)$  doit être le même terme mais évalué en  $x = x_i$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Interpolation de Lagrange II

Pour satisfaire  $L_i(x_i) = 1$ , le dénominateur de  $L_i(x)$  doit être le même terme mais évalué en  $x = x_i$ .

Ainsi

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Le polynôme d'interpolation est facilement décrit une fois que la forme de  $L_i$  est connue.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### DÉFINITION

Pour tout  $i = 0, \dots, n$ , on définit le  $i$ ème **polynôme de Lagrange élémentaire**, par

- $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  (poly de degré  $\leq n$ ) ;

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### DÉFINITION

Pour tout  $i = 0, \dots, n$ , on définit le  $i$ ème **polynôme de Lagrange élémentaire**, par

- $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  (poly de degré  $\leq n$ ) ;
- $L_i(x_j) = \delta_{ij}$  pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  
i.e.,  $L_i(x_i) = 1$  et  $L_i(x_j) = 0$  si  $i \neq j$ ,  $x_j$  est racine de  $L_i$  pour  $i \neq j$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 1

Soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  points distincts de  $[a, b]$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 1

Soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  points distincts de  $[a, b]$ .

Alors, pour tout  $i = 0, \dots, n$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PREUVE

Comme, pour tout  $j = 0, \dots, n, j \neq i$ ,  $x_j$  est racine de  $L_i$ , il s'écrit

$$L_i(x) = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j).$$



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PREUVE

Comme, pour tout  $j = 0, \dots, n, j \neq i$ ,  $x_j$  est racine de  $L_i$ , il s'écrit

$$L_i(x) = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j).$$

Pour déterminer  $\alpha$ , on utilise le fait que  $L_i(x_i) = 1$

$$1 = \alpha \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \Rightarrow L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PROPOSITION

La famille  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $R_n[X]$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PROPOSITION

La famille  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $R_n[X]$ .

#### PREUVE

Supposons que

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j L_j = 0.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PROPOSITION

La famille  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $R_n[X]$ .

#### PREUVE

Supposons que

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j L_j = 0.$$

On a, pour tout  $j$ ,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j L_j(x_i) = 0,$$

d'où  $\alpha_j = 0$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PROPOSITION

La famille  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $R_n[X]$ .

#### PREUVE

Supposons que

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j L_j = 0.$$

On a, pour tout  $j$ ,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j L_j(x_i) = 0,$$

d'où  $\alpha_j = 0$ .

La famille  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est libre et puisque  $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PROPOSITION

La famille  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

#### PREUVE

Supposons que

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j L_j = 0.$$

On a, pour tout  $j$ ,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j L_j(x_i) = 0,$$

d'où  $\alpha_j = 0$ .

La famille  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est libre et puisque  $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Question :** Comment construire un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \dots, n$  ?

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 2

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  points distincts de  $[a, b]$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 2

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  points distincts de  $[a, b]$ .

Alors,  $\exists$  un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  vérifiant

$$P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \dots, n.$$



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 2

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  points distincts de  $[a, b]$ .

Alors,  $\exists$  un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  vérifiant

$$P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \dots, n.$$

De plus,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x).$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PREUVE (existence)

Comme  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et puisque  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ , il existe  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(x).$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PREUVE (existence)

Comme  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et puisque  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ , il existe  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(x).$$

Or,  $P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \dots, n$ , par suite

$$f(x_i) = P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(x_i) = \alpha_i$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PREUVE (existence)

Comme  $\{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $R_n[X]$ , et puisque  $P_n \in R_n[X]$ , il existe  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(x).$$

Or,  $P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \dots, n$ , par suite

$$f(x_i) = P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(x_i) = \alpha_i$$

Donc,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x).$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PREUVE (unicité)

Supposons qu'il existe  $P_n$  et  $Q_n$  deux éléments de  $R_n[X]$  tel que,  $\forall i = 0, \dots, n$

$$P_n(x_i) = f(x_i), Q_n(x_i) = f(x_i).$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### PREUVE (unicité)

Supposons qu'il existe  $P_n$  et  $Q_n$  deux éléments de  $R_n[X]$  tel que,  $\forall i = 0, \dots, n$

$$P_n(x_i) = f(x_i), Q_n(x_i) = f(x_i).$$

Posons  $D_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$ ,  $D_n \in R_n[X]$ . On a

$$D_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0, \forall i = 0, \dots, n$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### DÉFINITION

Le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x),$$

est le  $n$ -ième polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_n$ , ces points sont appelés *noeuds*.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

$n = 2$ ,  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 2.75$  et  $x_2 = 4$ , avec  $f(x) = 1/x$ .

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{2}{3}(x - 2.75)(x - 4),$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -\frac{16}{15}(x - 2)(x - 4),$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{2}{5}(x - 2)(x - 2.75).$$

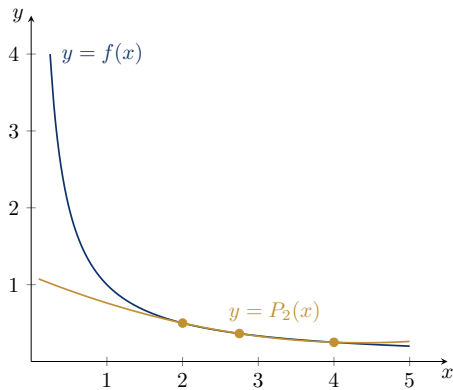
On a  $f(x_0) = f(2) = 1/2$ ,  $f(x_1) = f(2.75) = 4/11$  et  $f(x_2) = f(4) = 1/4$ , donc

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}.$$



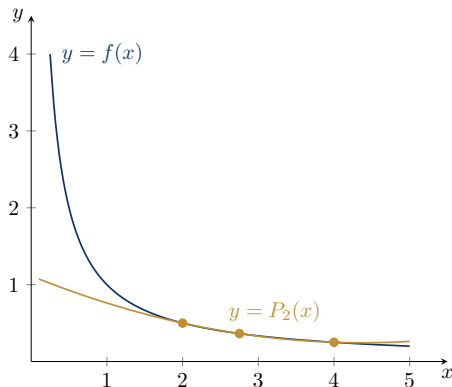
# 4. Interpolation et approximation polynomiale

## 4.2 Interpolation de Lagrange



# 4. Interpolation et approximation polynomiale

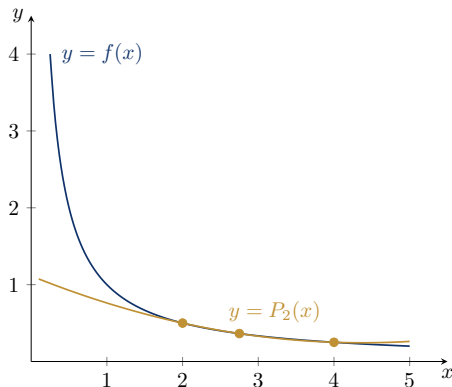
## 4.2 Interpolation de Lagrange



En dehors de  $[2, 4]$ ,  $P_n$  peut présenter des écarts importants par rapport  $f$ .

# 4. Interpolation et approximation polynomiale

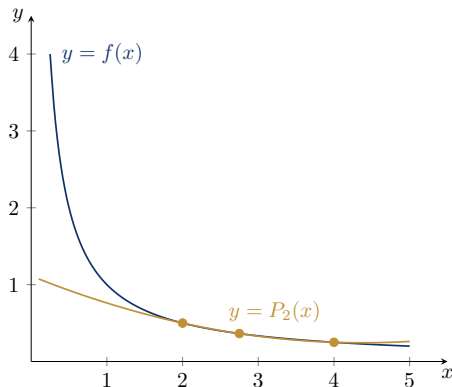
## 4.2 Interpolation de Lagrange



En dehors de  $[2, 4]$ ,  $P_n$  peut présenter des écarts importants par rapport  $f$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

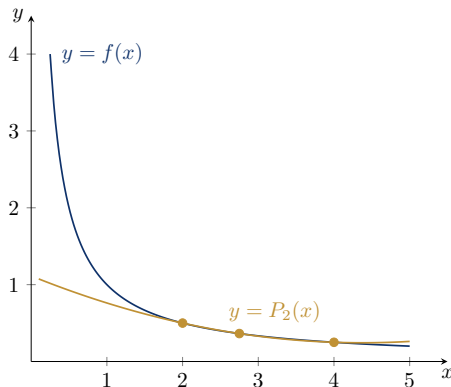


En dehors de  $[2, 4]$ ,  $P_n$  peut présenter des écarts importants par rapport  $f$ .

**Question :** Quelle est l'erreur commise en remplaçant  $f$  par  $P_n$  ?

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange



En dehors de  $[2, 4]$ ,  $P_n$  peut présenter des écarts importants par rapport  $f$ .

**Question :** Quelle est l'erreur commise en remplaçant  $f$  par  $P_n$  ?

Par exemple, une approximation de  $f(3) = 1/3$  est donnée par

$$f(3) \approx P_2(3) = \frac{29}{88} \approx 0.3295.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème de Rolle

Supposons que  $f \in C[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .

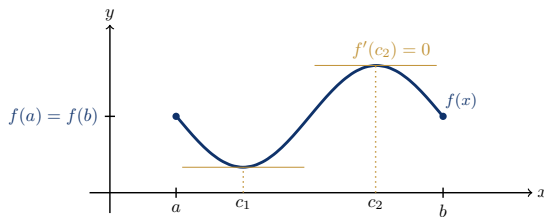
## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème de Rolle

Supposons que  $f \in C[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe (au moins) un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème de Rolle généralisé

Supposons que  $f \in C[a, b]$  et que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $]a, b[$ .



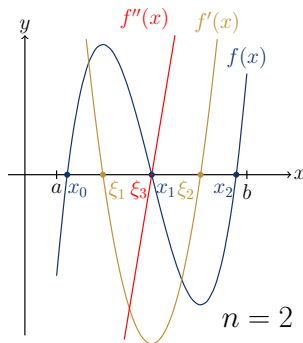
## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème de Rolle généralisé

Supposons que  $f \in C[a, b]$  et que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $f$  s'annule aux  $(n+1)$  points distincts  $x_0, \dots, x_n$  dans  $[a, b]$ , alors il existe un réel  $\xi \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(\xi) = 0$ .



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 3

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 3

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  et soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  noeuds distincts de  $[a, b]$ .

Alors, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi_x \in ]a, b[$  (un nombre généralement inconnu) tel que :

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 3

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  et soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  noeuds distincts de  $[a, b]$ .

Alors, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi_x \in ]a, b[$  (un nombre généralement inconnu) tel que :

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### Théorème 3

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  et soit  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n+1)$  noeuds distincts de  $[a, b]$ .

Alors, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi_x \in ]a, b[$  (un nombre généralement inconnu) tel que :

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

En particulier, si  $M_n = \max_{y \in [a, b]} \{|f^{(n+1)}(y)|\}$ , alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- Le Th3 fourni une borne de l'erreur impliquée dans l'approximation d'une fonction par un polynôme d'interpolation.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- Le Th3 fourni une borne de l'erreur impliquée dans l'approximation d'une fonction par un polynôme d'interpolation.
- Il s'agit d'un résultat théorique important car les polynômes de Lagrange sont largement utilisés pour dériver des méthodes de **différenciation et d'intégration numériques**.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- Le Th3 fourni une borne de l'erreur impliquée dans l'approximation d'une fonction par un polynôme d'interpolation.
- Il s'agit d'un résultat théorique important car les polynômes de Lagrange sont largement utilisés pour dériver des méthodes de **différenciation et d'intégration numériques**.
- Les bornes d'erreur pour ces méthodes sont obtenues à partir de ce résultat.



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- Le Th3 fourni une borne de l'erreur impliquée dans l'approximation d'une fonction par un polynôme d'interpolation.
- Il s'agit d'un résultat théorique important car les polynômes de Lagrange sont largement utilisés pour dériver des méthodes de **différenciation et d'intégration numériques**.
- Les bornes d'erreur pour ces méthodes sont obtenues à partir de ce résultat.
- La borne n'implique pas la convergence de  $P_n$  vers  $f$  !

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- Le Th3 fourni une borne de l'erreur impliquée dans l'approximation d'une fonction par un polynôme d'interpolation.
- Il s'agit d'un résultat théorique important car les polynômes de Lagrange sont largement utilisés pour dériver des méthodes de **différenciation et d'intégration numériques**.
- Les bornes d'erreur pour ces méthodes sont obtenues à partir de ce résultat.
- La borne n'implique pas la convergence de  $P_n$  vers  $f$  !
- Augmenter  $n$  n'améliore pas nécessairement la qualité de l'approximation.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- On remarque que la forme de l'erreur pour le polynôme de Lagrange est assez similaire à celle du polynôme de Taylor.

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- On remarque que la forme de l'erreur pour le polynôme de Lagrange est assez similaire à celle du polynôme de Taylor.

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

- Cependant, toute l'information utilisée dans l'approximation est concentrée sur un seul point  $x_0$ , alors qu'un "bon" polynôme d'interpolation doit fournir une approximation relativement précise sur un intervalle entier.

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### REMARQUES

- On remarque que la forme de l'erreur pour le polynôme de Lagrange est assez similaire à celle du polynôme de Taylor.

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

- Cependant, toute l'information utilisée dans l'approximation est concentrée sur un seul point  $x_0$ , alors qu'un "bon" polynôme d'interpolation doit fournir une approximation relativement précise sur un intervalle entier.
- L'erreur d'approximation d'une fonction  $f$  par son polynôme d'interpolation de Lagrange  $P_n$  en tout point  $x$  de l'intervalle d'interpolation s'écrit

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

Déterminons l'erreur maximale dans l'exemple précédent lorsque l'on utilise  $P_2(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$  pour approcher  $f(x) = 1/x$  sur  $[a, b] = [2, 4]$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

Déterminons l'erreur maximale dans l'exemple précédent lorsque l'on utilise  $P_2(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$  pour approcher  $f(x) = 1/x$  sur  $[a, b] = [2, 4]$ .

On a  $f'(x) = -x^{-2}$ ,  $f''(x) = 2x^{-3}$  et  $f'''(x) = -6x^{-4}$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

Déterminons l'erreur maximale dans l'exemple précédent lorsque l'on utilise  $P_2(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$  pour approcher  $f(x) = 1/x$  sur  $[a, b] = [2, 4]$ .

On a  $f'(x) = -x^{-2}$ ,  $f''(x) = 2x^{-3}$  et  $f'''(x) = -6x^{-4}$ .

Ainsi, le terme d'erreur de  $P_2$  est de la forme

$$\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - 2)(x - 2.75)(x - 4), \quad \text{pour } \xi_x \in ]2, 4[.$$



## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

Déterminons l'erreur maximale dans l'exemple précédent lorsque l'on utilise  $P_2(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$  pour approcher  $f(x) = 1/x$  sur  $[a, b] = [2, 4]$ .

On a  $f'(x) = -x^{-2}$ ,  $f''(x) = 2x^{-3}$  et  $f'''(x) = -6x^{-4}$ .

Ainsi, le terme d'erreur de  $P_2$  est de la forme

$$\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - 2)(x - 2.75)(x - 4), \quad \text{pour } \xi_x \in ]2, 4[.$$

La fonction  $|f'''(x)| = 6x^{-4}$  est maximale lorsque  $x = 2$  ( $|f'''| \searrow$  sur  $[2, 4]$ ), i.e.,

$$\max_{\xi_x \in [2, 4]} |f'''(\xi_x)| = \frac{6}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

On détermine la valeur maximale sur cet intervalle de la valeur absolue du polynôme:

$$g(x) = (x - 2)(x - 2.75)(x - 4).$$

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

On détermine la valeur maximale sur cet intervalle de la valeur absolue du polynôme:

$$g(x) = (x - 2)(x - 2.75)(x - 4).$$

Comme  $g'(x) = \frac{1}{2}(3x - 7)(2x - 7)$ , les points critiques sont  $x = 7/3$  et  $x = 7/2$ ,  
 $g(7/3) = 25/108 \approx 0.23$  et  $g(7/2) = -9/16 \approx 0.56$ .

## 4. Interpolation et approximation polynomiale

### 4.2 Interpolation de Lagrange

#### EXEMPLE

On détermine la valeur maximale sur cet intervalle de la valeur absolue du polynôme:

$$g(x) = (x - 2)(x - 2.75)(x - 4).$$

Comme  $g'(x) = \frac{1}{2}(3x - 7)(2x - 7)$ , les points critiques sont  $x = 7/3$  et  $x = 7/2$ ,  
 $g(7/3) = 25/108 \approx 0.23$  et  $g(7/2) = -9/16 \approx 0.56$ .

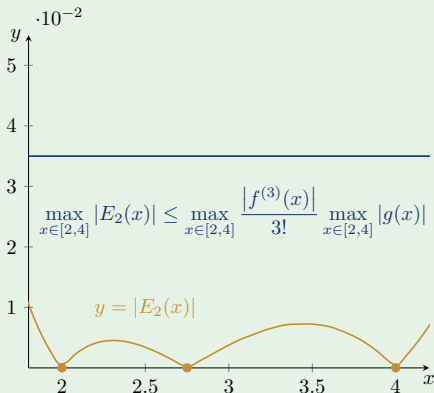
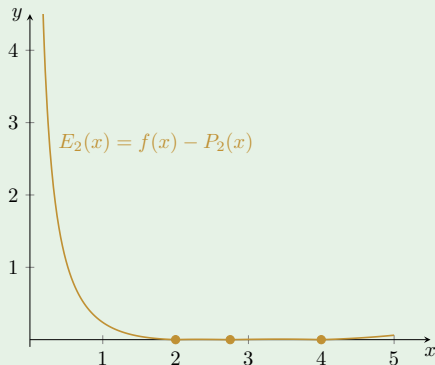
Ainsi,

$$\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \leq \frac{3}{8 \cdot 6} |-9/16| = 9/256 \approx 0.035.$$

# 4. Interpolation et approximation polynomiale

## 4.2 Interpolation de Lagrange

### EXEMPLE



# 4. Interpolation et approximation polynomiale

## 4.2 Interpolation de Lagrange

### EXEMPLE (phénomène de Runge, 1901)

