Méthodes Numériques

L2 MIASHS

Fabien Navarro

E-mail: fabien.navarro@univ-paris1.fr

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Chapitre 5 : Intégration numérique

5. Intégration numérique

5.1 Introduction

But :

On considère des méthodes numériques pour approcher des intégrales définies : $\int_a^b f(x)dx$.

Motivations

On a souvent besoin d'évaluer une intégrale

- d'une fonction qui n'a pas de primitive explicite ;
- ou dont la primitive n'est pas facile à obtenir.

Méthodes

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux méthodes de quadrature,

- qui consistent à approcher $\int_a^b f(x)dx$ par une somme pondérée de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

- en particulier à celles basées sur les polynômes d'interpolation.

5. Intégration numérique

5.1 Introduction

Principe :

Le principe de base est

1. de sélectionner un ensemble de nœuds distincts $\{x_0, \dots, x_n\}$ d'un intervalle $[a, b]$.
2. Puis intégrer le polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x),$$

3. et son erreur de troncature sur $[a, b]$, pour obtenir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)dx.$$

Formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx,$$

où $a_i = \int_a^b L_i(x)dx, \quad i = 0, \ldots, n.$
La formule de quadrature est donc

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

et l'erreur est donnée par

$$e(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx.$$

Méthode naturelle : sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit la partition de $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur égale $h = \frac{b-a}{n}$, avec

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dans chaque sous-intervalle, on choisit un point arbitraire $x_{k-1} < c_k < x_k$

$$l_n = f(x_0)h + \ldots + f(x_{n-1})h = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})h$$
$$r_n = f(x_1)h + \ldots + f(x_n)h = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h,$$
$$S_n = f(c_1)h + \ldots + f(c_n)h = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)h,$$

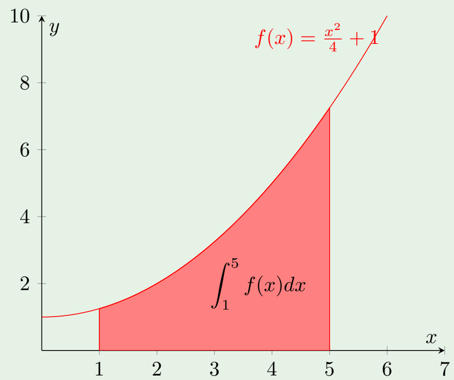
S_n : Somme de Riemann,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

EXEMPLE 1

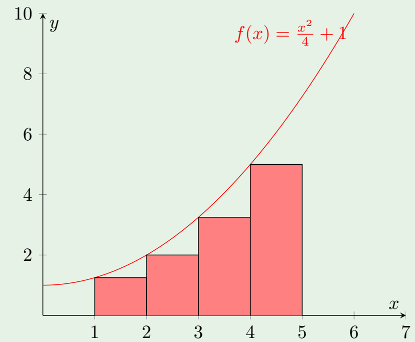
En utilisant l_4, r_4 et S_4, approcher l'intégrale de $f(x) = x^2/4 + 1$, sur $[a, b] = [1, 5]$.

$$I = \int_1^5 f(x)dx = 43/3 \approx 14.333...$$



EXEMPLE 1

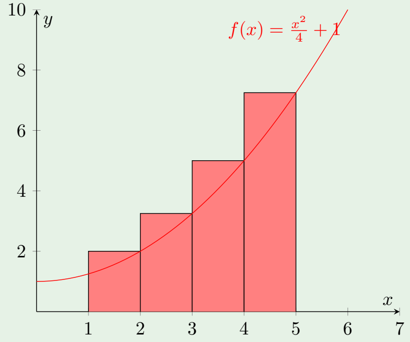
$$l_4 = f(1)h + f(2)h + f(3)h + f(4)h$$
$$= 1.25 + 2 + 3.25 + 5$$
$$= 11.5 < I.$$



5. Intégration numérique
5.1 Introduction

EXEMPLE 1

$$\begin{aligned} r_4 &= f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \\ &= 2 + 3.25 + 5 + 7.25 \\ &= 17.5 > I. \end{aligned}$$



5. Intégration numérique
5.1 Introduction

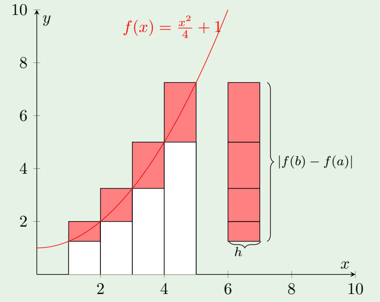
EXEMPLE 1

L'erreur d'approximation pour les sommes à gauche et à droite

$$\begin{aligned} e_{l_n} &= |I - l_n| \leq |r_n - l_n|, \\ e_{r_n} &= |I - r_n| \leq |r_n - l_n|, \end{aligned}$$

où

$$|r_n - l_n| = |f(b) - f(a)|h$$



5. Intégration numérique
5.1 Introduction

EXEMPLE 1

Dans notre exemple, on a

$$\text{Erreur} \leq |7.25 - 1.25|\frac{5-1}{4} = 6$$

Si nous voulons une précision particulière, disons 0.05, le nombre de rectangles nécessaires doit satisfaire

$$|7.25 - 1.25|\frac{5-1}{n} = 0.05$$

Soit $n = 480$.

5. Intégration numérique
5.1 Introduction

Exercice :

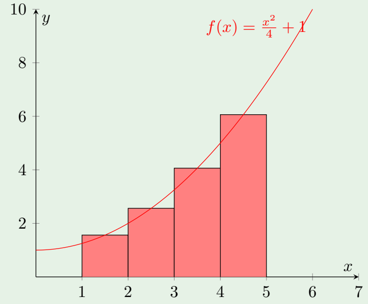
1. Calculez la somme de Riemann indiquée pour la fonction $f(x) = x^2 + 5x$.
   - r_3 sur $[0, 3]$.
   - l_3 on $[0, 3]$.
2. Calculez les bornes d'erreur pour r_3 et l_3.
3. Quelle est la valeur de n pour que

$$\int_a^b f(x) = r_n \pm 0.1$$

5. Intégration numérique
5.1 Introduction

EXEMPLE 1

Reprenons notre problème initial et calculons la somme de Riemann en utilisant les points milieu pour c_k (i.e., $c_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$).



5. Intégration numérique
5.1 Introduction

EXEMPLE 1

La largeur de chaque rectangle est à nouveau $hx = 1$. Les hauteurs sont maintenant

$$f(3/2), f(5/2), f(7/2), f(9/2).$$

La somme des rectangles est donc

$$S_4 = 1.5625 + 2.5625 + 4.0625 + 6.0625 = 14.25$$

Même si S_R est assez proche de $I \approx 14.33$, une méthode basée sur la définition de l'intégrale de Riemann n'est pas très efficace pour approcher I.

5. Intégration numérique
5.2 Méthodes de quadrature

Méthode des Trapèzes

Pour obtenir la règle du trapèze afin d'approcher $I = \int_a^b f(x)dx$, posons $x_0 = a$, $x_1 = b$ et $h = b - a$, et utilisons le polynôme de Lagrange linéaire ($n = 1$) :

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1).$$

Alors, on

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)dx.$$

Comme $(x - x_0)(x - x_1)$ ne change pas de signe sur $[x_0, x_1]$, le Th des accroissements finis généralisé (ou Th de la moyenne pondérée) peut s'appliquer sur le terme d'erreur pour un certain $\xi \in]x_0, x_1[$.

5. Intégration numérique
5.2 Méthodes de quadrature

Théorème (TAF généralisé version intégrale)

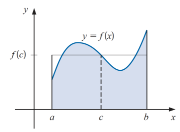
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $C([a, b])$ et soit g Riemann intégrable sur $[a, b]$, et g ne change pas de signe sur $[a, b]$.

Alors, $\exists c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, si $g \equiv 1$, alors

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx.$$



Méthode des Trapèzes

TAF généralisé

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)dx &= f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{(x_1+x_0)}{2}x^2+x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}\\ &= -\frac{h^3}{6}f''(\xi).\end{aligned}$$

Méthode des Trapèzes

i.e.,

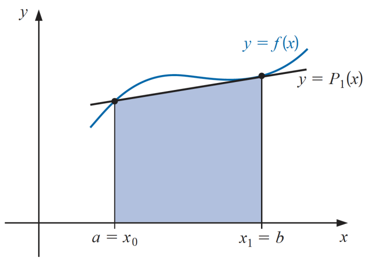
$$\begin{aligned}I &= \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx+\frac{1}{2}(-\frac{h^3}{6}f''(\xi))\\ &= \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1}-\frac{h^3}{12}f''(\xi)\\ &= \frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi).\end{aligned}$$

Méthode des Trapèzes

En posant $h = x_1 - x_0$, on obtient la méthode des trapèzes :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi).$$

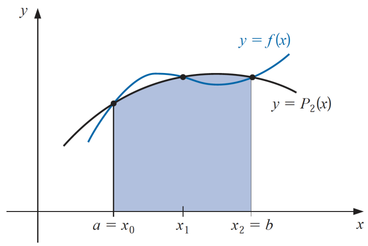
(exacte pour tout polynôme de degré ≤ 1)



Dans le cas où f est positive sur $[a, b]$ l'aire est approchée par l'aire sous une droite affine, l'aire, i.e., l'aire d'un trapèze.

Méthode de Simpson

Par le même raisonnement, en intégrant P_2 sur $[a, b]$ avec les noeuds $x_0 = a$, $x_2 = b$ et $x_1 = a + h$ où $h = (b - a)/2$.



Méthode de Simpson

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-2)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x1)} f(x_2) dx$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} \int_{x_0}^{x_2} f'''(\xi_x) dx.$$

REMARQUE

- La dérivation de la règle de Simpson de cette manière ne fournit cependant qu'un terme d'erreur $O(h^4)$ impliquant f'''.
- En abordant le problème d'une autre manière, un terme d'ordre supérieur impliquant $f^{(4)}$ peut-être obtenu.

Méthode de Simpson

Pour illustrer cette approche alternative, supposons que f admette un développement de Taylor à l'ordre 3 autour de x_1 :

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}(x-x_1)^4,$$

et

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \Bigg[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2$$
$$+ \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^3(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \Bigg]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi_x)(x-x_1)^4 dx.$$

Méthode de Simpson

TAF généralisé ($(x-x_1)^4$ ne change pas de signe sur $[x_0, x_2]$)

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi_x)(x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}\left[(x-x_1)^4\right]_{x_0}^{x_2}$$

pour $\xi_1 \in]x_0, x_2[$.
Or, $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$, donc

$$(x_1-x_2)^2 - (x_0-x_1)^2 = (x_1-x_2)^4 - (x_0-x_1)^4 = 0$$

et

$$(x_2-x_1)^3 - (x_0-x_1)^3 = 2h^3, \quad (x_2-x_1)^5 - (x_0-x_1)^5 = 2h^5.$$

Par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5.$$

...

Méthode de Simpson

(après quelques manipulations supplémentaires...) On obtient la méthode de Simpson :

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

(exacte pour tout polynôme de degré ≤ 3).

EXEMPLE 2

Comparaison entre les méthodes d'approximation de Simpson et des trapèzes pour $\int_0^2 f(x)dx$, avec $f(x)$:

1. x^2
2. x^4
3. $(x+1)^{-1}$
4. $\sqrt{1+x^2}$
5. $\sin x$
6. e^x

EXEMPLE 2

Sur $[0,2]$ les méthodes ont les formes suivantes :
Trapèze :

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)+f(2)$$

Simpson :

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

Pour $f(x)=x^2$, on a

$$\int_0^2 f(x)dx \approx 0+2^2=4$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[0+4+4]=8/3.$$

EXEMPLE 2

$f(x)$	x^2	x^4	$(x+1)^{-1}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
I	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Trapèze	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
Simpson	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

La dérivation standard des formules d'erreur de quadrature est basée sur la détermination de la classe de polynômes pour laquelle ces formules produisent des résultats exacts.

DEFINTION

Le degré de précision, ou l'ordre, d'une formule de quadrature est le plus grand nombre entier positif n tel que la formule est exacte pour x^k, pour tout $k=0,1,\dots,n$.

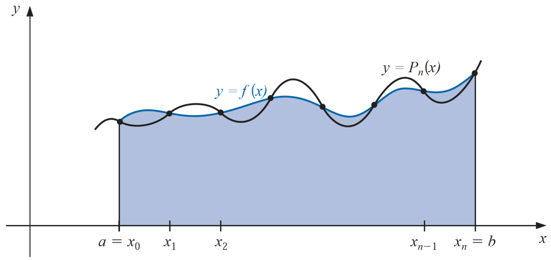
REMARQUE

- La définition implique que les méthodes des trapèzes et de Simpson ont des degrés de précision un et trois, respectivement.
- L'intégration et la sommation sont des opérations linéaires, ce qui implique que : L'ordre d'une formule de quadrature est n si et seulement si l'erreur est nulle pour tous les polynômes de degré $k=0,1,\dots,n$, mais n'est pas nulle pour certains polynômes de degré $n+1$.
- Simpson et Trapèze sont des exemples d'une classe de méthodes connues sous le nom de formules de Newton-Cotes.

Formules de Newton-Cotes fermées

La formule de Newton-Cotes fermée à $(n+1)$ points utilise les noeuds $x_i = x_0 + ih$, pour $i = 0, 1, \dots, n$, où $x_0 = a$, $x_n = b$ et $h = (b-a)/n$.

On l'appelle fermée car les extrémités de l'intervalle fermé $[a, b]$ sont incluses comme noeuds.



Formules de Newton-Cotes fermées

Elle est de la forme

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

où

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}dx.$$

Théorème 1

Supposons que $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ désigne la formule de Newton-Cotes fermée à $(n+1)$ points, avec $x_0 = a$, $x_n = b$ et $h = (b-a)/n$.

Alors, $\exists \xi \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\dots(t-n)dt,$$

si n est paire et $f \in C^{n+2}[a, b]$. Et

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\dots(t-n)dt,$$

si n est pair et $f \in C^{n+1}[a, b]$.

REMARQUE

- Lorsque n est un nombre entier pair, l'ordre est $n+1$, bien que le polynôme d'interpolation soit de degré au plus n.
- Lorsque n est impair, le degré de précision est n.
- $n = 1$: Méthode des trapèzes

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

  où $\xi \in]x_0, x_1[$.
- $n = 2$: Méthode de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

  où $\xi \in]x_0, x_2[$.
- ...