Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Normes matricielles induites

Soit $E_n = \mathbb{K}^n$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\|\cdot\|_E$ une norme vectorielle sur E_n. On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices de taille $m \times n$. On appelle norme matricielle induite par (ou subordonnée à) la norme vectorielle $\|\cdot\|_{E_n}$ l'application de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\|A\| = \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Ax\|_{E_m}, \quad A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

Exercice 1. Montrer qu'une norme matricielle induite définie une norme dans l'espace vectoriel des matrices.

Correction 1. Il faut vérifier que

1. $N(x) > 0$;
2. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
4. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

1. ok
2. $\|A\| = 0$
   Par définition $\|A\| = \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Ax\|_{E_m}$, donc $\max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Ax\|_{E_m} = 0 \Rightarrow \|Ax\|_{E_m} = 0 \Rightarrow$ $Ax = 0$ (car $\|\cdot\|_{E_m}$ est une norme).
   $\forall y \in E_n$ tel que $y \neq 0$, on pose $x = \frac{y}{\|y\|_{E_n}}$. On a
   $$\|x\|_{E_n} = \frac{\|y\|_{E_n}}{\|y\|_{E_n}} = 1$$
   et
   $$Ax = \frac{Ay}{\|y\|_{E_n}} = 0, y \neq 0.$$
   Donc $A = 0_{\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})}$
3. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$.
   On a, $\|\lambda A\| = \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|\lambda Ax\|_{E_m}$. Or $\|\lambda Ax\|_{E_m} = |\lambda| \|Ax\|_{E_m}$ (car $\|\cdot\|_{E_m}$ est une norme). On en déduit que
   $$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|\lambda Ax\|_{E_m} = |\lambda| \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Ax\|_{E_m} = \lambda \|A\|.$$
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On a
   $$\|A+B\| = \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|(A+B)x\|_{E_m}$$
   Or,
   $$\|(A+B)x\|_{E_m} = \|Ax + Bx\|_{E_m} \leq \|Ax\|_{E_m} + \|Bx\|_{E_m}$$
   Par conséquent,
   $$\|A+B\| \leq \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Ax\|_{E_m} + \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Bx\|_{E_m} = \|A\| + \|B\|.$$

Exercice 2. Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme induite, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, on a

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{0\leq\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

Correction 2. Par définition, $\|A\| = \max_{\|x\|_{E_n}=1} \|Ax\|_{E_m}$.

$\forall y \in E_n$ tel que $y \neq 0$, on pose $x = \frac{y}{\|y\|_{E_n}} \Rightarrow \|x\|_{E_n} = \frac{\|y\|_{E_n}}{\|y\|_{E_n}} = 1$.

Par suite,

$$\|A\| = \max_{y\neq 0} \|A\frac{y}{\|y\|_{E_n}}\|_{E_m} = \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_{E_n}}{\|y\|_{E_n}}.$$

Exercice 3. Montrer que pour toute norme matricielle induite, on a

a) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \forall x \in E_n$;

b) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, pour toute $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}$.

On considère dans E_n, les normes vectorielles suivantes

$$\|x\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Correction 3.

a) Par définition, on a $\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Donc, $\forall x \neq 0$, on a

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

b) $\|AB\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}$. D'après a), on a

$$\|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\|.$$

Exercice 4. Soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, avec U et V unitaires (i.e., $\|Bx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in E_n$). Montrer que

$$\|VAU\|_2 = \|A\|_2.$$

avec $\|\cdot\|_2$ la norme matricielle induite par la norme 2.

Correction 4. Soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, avec U et V unitaires, i.e. $UU^T = I_n$ et $VV^T = I_p$.

Rappel : pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(\|Ax\|_2)^2 =< Ax, Ax >=< x, A^T Ax >=< A^T Ax, x > .$$

où $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Si A est unitaire, $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$.

Par définition, $\|B\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1}\{\|Bx\|_2\}$ et on a

$$\|VAUx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \{\|VAUx\|_2\}.$$

$$(\|VAUx\|_2)^2 =< VAUx, VAUx >=< AUx, V^T VUx >=< AUx, AUx >$$

Or U est unitaire : $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$. Si $\|x\|_2 = 1$ alors $\|Ux\|_2 = 1$ et réciproquement.

Par suite,

$$\|VAU\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \{\|AUx\|_2\} = \sup_{\|y\|_2=1} \{\|Ay\|_2\} = \|A\|_2$$

où $y = Ux$. (Car par définition $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1}\{\|Ax\|_2\}$).

Conclusion,

$$\|VAU\|_2 = \|A\|_2.$$

pour tout U, V unitaires.

Suites de matrices

Exercice 5. Soit B une matrice carrée. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$;

b) $\lim_{k\to\infty} B^k x = 0$ pour tout $x \in E_n$;

c) $\rho(B) < 1$;

d) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée.

Indication : démarche *a)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* $\Rightarrow$ *d)* $\Rightarrow$ *a)*.

Correction 5. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Par définition $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$.

1. pour toute norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$, on a $\rho(A) \leq \|A\|$.

2. $\forall\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée (qui peut dépendre de ε) $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

a) $\Rightarrow$ *b)*

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après 3.a)

$$\|A^k x\| \leq \|A^k\|\|x\|.$$

Donc si $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$, alors $\lim_{k\to\infty} \|A^k x\| = 0$.

b) $\Rightarrow$ *c)*

Soit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \rho(A)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A.

On a

$$Av = \lambda_{i_0} v$$

avec v vecteur propre associé à λ_{i_0}.

Comme $A^k v = \lambda_{i_0}^k v$, si $\lim_{k\to\infty} A^k v = 0$, alors $\lim_{k\to\infty} \lambda_{i_0}^k v = v \lim_{k\to\infty} \lambda_{i_0}^k = 0 \Rightarrow |\lambda_{i_0}| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1$.

c) $\Rightarrow$ *d)*

$\forall\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée (qui peut dépendre de ε) $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Donc, si $\rho(A) < 1$, pour $\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2}$, alors $\rho(A)+\varepsilon < 1$. On en déduit qu'il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$.

d) $\Rightarrow$ *a)*

Comme $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, si $\lim_{k\to\infty} \|A\|^k = 0$, alors $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$.

Exercice 6. Soit B une matrice carrée. Soit $S_k = \sum_{l=0}^{k} B^l$ ($B^0 = I_n$). Montrer que S_k converge vers $(I_n - B)^{-1}$ si et seulement si $\rho(B) < 1$.

Correction 6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S_k = \sum_{l=0}^{k} B^l$ avec $B^0 = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On a

$$\begin{aligned}
(I-B)S_k &= (I-B)\sum_{l=0}^{k} B^l \\
&= I\sum_{l=0}^{k} B^l - B\sum_{l=0}^{k} B^l \\
&= \sum_{l=0}^{k} B^l - \sum_{l=0}^{k} B^{l+1} \\
&= \sum_{l=0}^{k} B^l - \sum_{m=1}^{k+1} B^m \\
&= (I + B + B^2 + ... + B^k) - (B + B^2 + ... + B^{k+1}) \\
&= I - B^{k+1}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(I-B)S_k \to I$ quand $k \to \infty$ ce qui équivaut à :

$$B^{k+1} \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \rho(B) < 1.$$

Conditionnement d'une matrice et applications aux systèmes linéaires

Soit A une matrice carrée inversible, le conditionnement de A, noté $\mathrm{Cond}(A)$, est le nombre définie par

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|,$$

où $\|\cdot\|$ une norme matricielle. On notera $\mathrm{Cond}_n(A)$ le conditionnement calculé avec la norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_n$, $n = 1, 2$ ou ∞.

Exercice 7. Soit A une matrice carrée réelle. Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\mathrm{Cond}(A) \geq 1$;
b) $\mathrm{Cond}(A^{-1}) = \mathrm{Cond}(A)$;
c) $\mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A), \alpha \in \mathbb{R}^*$;
d) Si A est symétrique, $\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$;
e) Si P est une matrice orthogonale, $\mathrm{Cond}_2(PA) = \mathrm{Cond}_2(A)$.

(avec $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ la plus grande et la plus petite valeur propre de A).

Correction 7.

a) On a $I_n = AA^{-1} \Rightarrow 1 \leq \|I_n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$. D'où $\mathrm{Cond}(A) \in [1, \infty[$.
b) $\mathrm{Cond}(A^{-1}) = \|A^{-1}\|\|(A^{-1})^{-1}\| = \|A\|\|A^{-1}\| = \mathrm{Cond}(A)$.
c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $\mathrm{Cond}(\alpha A) = \|\alpha A\|\|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha|\|A\|\|\frac{1}{\alpha}A^{-1}\| = \frac{|\alpha|}{|\alpha|}\|A\|\|A^{-1}\| = \mathrm{Cond}(A)$.
d) $A^T = A$

Exercice 8. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible et $\vec{b}$ et $\vec{\Delta b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soient $\vec{x}$ et $\vec{\hat{x}}$ les solutions des systèmes linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ et $A\vec{\hat{x}} = \vec{b} + \vec{\Delta b}$, respectivement. On pose $\vec{\Delta x} = \vec{\hat{x}} - \vec{x}$. Montrer que

$$\frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \mathrm{Cond}(A) \frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Correction 8.

$$\begin{aligned} Ax &= b && (1) \\ A\hat{x} &= b + \Delta b. && (2) \end{aligned}$$

On pose $\Delta x = x - \hat{x}$ (e.g., erreur de calcul, avec Δb erreur sur le second membre).

Le but est de montrer que l'erreur relative sur la solution est majorée par le conditionnement de la matrice A multiplié par l'erreur relative sur le second membre.

(1) $\Rightarrow$ (2). $A(\hat{x} - x) = \Delta b$, i.e., $\Delta x = A^{-1}\Delta b$.

Comme $\Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|\Delta x\| &= \|A^{-1}\Delta b\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\|\Delta b\| && (3) \end{aligned}$$

or $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. i.e.

$$\begin{aligned} \|b\| &\leq \|A\|\|x\| \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\|\|x\|} &\leq \|A\| \frac{1}{\|b\|} && (4) \end{aligned}$$

Par suite (3)(4) entrainent

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Remarque : une matrice est dite bien conditionné si $\mathrm{Cond}(A)$ est proche de 1. Elle est dite mal conditionnée si $\mathrm{Cond}(A) >> 1$.

Exercice 9. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ 0.11 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2.1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Delta b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Calculer les solutions exactes $\vec{x}$ et $\vec{\hat{x}}$ des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ et $A\vec{\hat{x}} = \vec{b} + \vec{\Delta b}$, respectivement. Comparer. Que peut-on dire du conditionnement de la matrice A ?

Correction 9.

La matrice A est mal conditionnée, $\mathrm{Cond}_\infty(A) = 222$.

On trouve, $\vec{x} = (10, -1)^T$ et $\vec{\hat{x}} = (4, 0.4)^T$. Donc,

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.4 = 40\%, \quad \text{et, } \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \frac{4.10^{-2}}{2.1} \approx 2\%$$