# TP0

Aymeric Jan (aymeric.jan@univ-paris1.fr)

April 4, 2024

## Exercice 1

L'application $A \to ||A||_{\mathcal{M}}$ est une norme si elle vérifie les propriétés suivantes

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$, $||A+B||_{\mathcal{M}} \leq ||A||_{\mathcal{M}} + ||B||_{\mathcal{M}}$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda A||_{\mathcal{M}} = |\lambda| ||A||_{\mathcal{M}}$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}, ||A||_{\mathcal{M}} = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}}$

Pour le premier point

$$||A+B||_{\mathcal{M}} = \max_{||x||=1} ||(A+B)x|| \leq \max_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leq \max_{||x||=1} ||Ax|| + \max_{||x||=1} ||Bx|| = ||A||_{\mathcal{M}} + ||B||_{\mathcal{M}}$$

Pour le second

$$||\lambda A||_{\mathcal{M}} = \max_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \max_{||x||=1} |\lambda| \times ||Ax|| = |\lambda| \times \max_{||x||=1} ||Ax|| = |\lambda| \times ||A||_{\mathcal{M}}$$

Pour le dernier

$$||A||_{\mathcal{M}} = 0 \Leftrightarrow \max_{||x||=1} ||Ax|| = 0 \Rightarrow \forall x, ||Ax|| = 0 \Rightarrow \forall x, Ax = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}}.$$

## Exercice 2

Dans un premier temps, il suffit de remarquer que, si $y$ est un vecteur non nul, alors $x = \frac{y}{||y||}$ est un vecteur de norme 1.

Ainsi, on peut écrire

$$||A||_{\mathcal{M}} = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \max_{||y|| \neq 0} \left|\left| A \frac{y}{||y||} \right|\right| = \max_{||y|| \neq 0} \frac{||Ay||}{||y||}$$

Ensuite, posons

$$\phi : \lambda \in [0,1] \to \max_{||x||=1} ||A\lambda x|| = \max_{0 \leq ||x|| \leq 1} ||Ax||$$

Par propriété de la norme, on a également

$$\phi(\lambda) = \max_{||x||=1} ||A\lambda x|| = |\lambda| \times \max_{||x||=1} ||Ax||$$

Cette application est continue et atteint son maximum lorsque $\lambda = 1$, cela prouve donc que le maximum est obtenu pour un vecteur de norme 1 donc

$$\max_{0 \leq ||x|| \leq 1} ||Ax|| = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

# Exercice 3

## (a)

Par propriété des normes, on obtient les inéquations suivantes

$$||Ax|| = \left|\left|A\frac{x}{||x||}||x||\right|\right| = ||x||\frac{||Ax||}{||x||} \leq ||x|| \max_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = ||x|| \times ||A||_{\mathcal{M}}$$

## (b)

$$||AB||_{\mathcal{M}} = \max_{||x||=1} ||ABx|| \leq \max_{||x||=1} ||A||_{\mathcal{M}} \times ||Bx|| = ||A||_{\mathcal{M}} \max_{||x||=1} ||Bx|| = ||A||_{\mathcal{M}} \times ||B||_{\mathcal{M}}$$

# Exercice 4

Par définition, nous avons

$$||VAU||_{\mathcal{M}} = \max_{||x||=1} ||VAUx||$$

Posons $AUx = y$, comme $V$ est unitaire, nous avons $||Vy|| = ||y||$ ce qui nous donne

$$||VAU||_{\mathcal{M}} = ||AU||_{\mathcal{M}}$$

Posons maintenant $z = Ux$. Comme $U$ est unitaire, nous avons $||z|| = ||Ux|| = ||x||$, donc $||x|| \Rightarrow ||z|| = 1$.

Ainsi, nous pouvons écrire

$$||AU||_{\mathcal{M}} = \max_{||x||=1} ||AUx|| = \max_{z=Ux,\, ||z||=1} ||Az|| = ||A||_{\mathcal{M}}$$

On a bien montré que, si $U$ et $V$ sont deux matrices unitaires, alors

$$||VAU||_{\mathcal{M}} = ||A||_{\mathcal{M}}$$

# Exercice 5

## (a) $\Rightarrow$ (b)

L'application $\phi : x \to B^k x$ est continue, ainsi, par passage à la limite, on a

$$\lim_{k \to \infty} B^k = 0 \Rightarrow \forall x, \lim_{k \to \infty} B^k x = 0$$

### (b) $\Rightarrow$ (c)

Soit $\lambda_{max}$ la plus grande des valeurs propres de $B$ et $x_{\lambda_{max}}$ un vecteur propre associé.

Par hypothèse, on a $\forall x, \lim_{k\to\infty} B^k x = 0$, ce qui est vrai en particulier pour $x_{\lambda_{max}}$. Ainsi

$$B^k x_{\lambda_{max}} = \lambda_{max}^k x_{\lambda_{max}} \to 0$$

Or, $x_{\lambda_{max}}$ étant non nul, on a nécessairement $\lambda_{max}^k \to 0$ ce qui implique que $|\lambda_{max}| < 1$ soit encore

$$\rho(B) < 1$$

### (c) $\Rightarrow$ (d)

Si on a $\rho(B) < 1$, cela veut dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\rho(B) < 1 - 2\epsilon$.

D'après un des théorèmes précédents, $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour cet $\epsilon$, il existe au moins une norme $|| \bullet ||_{\mathcal{M}_n}$ telle que

$$||B||_{\mathcal{M}_n} \leq \rho(B) + \epsilon$$

Ainsi, en combinant les deux inégalités, on obtient

$$||B||_{\mathcal{M}_n} \leq \rho(B) + \epsilon < (1 - 2\epsilon) + \epsilon = 1 - \epsilon < 1$$

### (d) $\Rightarrow$ (a)

Par propriété de la norme induite, on a

$$||B^k||_{\mathcal{M}_n} \leq ||B||_{\mathcal{M}_n}^k$$

Ainsi, on a également

$$||B||_{\mathcal{M}_n}^k \to 0 \Rightarrow ||B^k||_{\mathcal{M}_n} \to 0$$

Ce qui par propriété de la norme, implique que

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

## Exercice 6

En utilisant la formule de Bernoulli sur les matrices on obtient

$$(I - B) \sum_{k=0}^{n-1} B^k = (I - B^n)$$

Si et seulement si $\rho(B) < 1$, alors $B^n \to 0$, ce qui donne

$$(I_n - B) \sum_{k=0}^{n-1} B^k \to I \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} B^k \to (I_n - B)^{-1}$$

# Exerice 7

## (a)

$$Cond(A) = ||A|| \times ||A^{-1}|| \geq ||AA^{-1}|| = ||I|| = 1$$

## (b)

$$Cond(A^{-1}) = ||A^{-1}|| \times ||A^{|}| = ||A|| \times ||A^{-1}|| = Cond(A)$$

## (c)

$$Cond(\alpha A) = ||\alpha A|| \times ||\alpha^{-1} A^{-1}|| = \frac{|\alpha|}{|\alpha|} ||A|| \times ||A^{-1}|| = Cond(A)$$

## (d)

$A$ est symétrique réelle donc diagonalisable selon le théorème spectral:

$$A = P^{-1} D P$$

avec $P$ orthogonale et $D$ diagonale.

$$||A|| \times ||A^{-1}|| = ||P^{-1} D P|| \times ||P^{-1} D^{-1} P|| = ||D|| \times ||D^{-1}|| = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$