Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne **U. F. R. 27**

Méthodes Numériques, Licence 2 MIASHS — TP2 — 2023-2024

Méthode de dichotomie

Exercice 1

1. Soit $x^* \in \mathbb{R}$ solution de $f(x) = 0$, où $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Montrer que si $x_n \in [a, b]$ est la valeur donnée à l'itération n par l'algorithme de bissection, alors l'erreur absolue vérifie
$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

2. Soit $\Delta x > 0$ petit. Calculer le nombre $n \in \mathbb{N}$ d'itérations de l'algorithme de bissection nécessaire pour avoir
$$|x_n - x^*| \leq \Delta x.$$

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de programmer la méthode de dichotomie pour résoudre une équation du type $f(x) = 0$, avec $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Une description de la méthode est donnée par l'Algorithme 1.

Algorithme 1 : Méthode de dichotomie I

```
Entrées : a, b, ε, f, Nmax;
Sorties : x*, n;
Initialisation;
n ⟵ 0;
an ⟵ a;
bn ⟵ b;
x_n ⟵ (an+bn)/2;
while |bn − an| > ε & n < Nmax do
    if f(an)f(x_n) < 0 then
        bn ⟵ x_n;
    else
        an ⟵ x_n;
    end
    x_n ⟵ (an+bn)/2;
    n ⟵ n + 1;
end
x* ⟵ x_n;
```

Dans la suite, on considère $f(x) = \exp(x) - 4x$.

1. Définir une fonction `f` qui prend en argument `x` et qui renvoie `y=f(x)`.
2. Afin de déterminer le nombre et la position approximative des racines situées dans $x \geq 0$, représenter graphiquement la fonction f.
3. Écrire une fonction `dichotomie1` sur le modèle de l'Algorithme 1.
4. Déterminer la valeur de la plus grande racine en utilisant la fonction `dichotomie1` pour $a = 1$, $b = 2.5$, $Nmax = 100$ et $\varepsilon = 1e$-8. Vérifier graphiquement vos résultats.
5. Définir une fonction `niterDicho` prenant en entrée a, b et ε et ayant comme paramètre de sortie `y` qui calcul le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'Algorithme 1 (suivant la précision souhaitée).

6. Vérifier que le nombre d'itérations calculés par votre algorithme coïncide avec celui obtenu à la question précédente.
7. Définir une fonction `dichotomie2` sur le modèle de l'Algorithme 2 (cette fonction stocke et renvoie également la suite des itérés x_n).
8. Illustrer graphiquement la convergence de la méthode en représentant l'erreur absolue en fonction du nombre d'itération (sur une échelle logarithmique).
9. Comment se comporte l'erreur entre deux itérations ? Quel est l'ordre de la méthode ?

Algorithme 2 : Méthode de dichotomie II

```
Entrées : a, b, ε, f, Nmax;
Sorties : x*, n, xn;
if a ≥ b then
    Attention : a doit être inférieur à b;
    Stop;
else
    Initialisation;
    n ⟵ 0;
    an ⟵ a;
    bn ⟵ b;
    x_n ⟵ (an+bn)/2;
    while |bn − an| > ε & n < Nmax do
        if f(an)f(x_n) < 0 then
            bn ⟵ x_n;
        else
            an ⟵ x_n;
        end
        x_n ⟵ (an+bn)/2;
        n ⟵ n + 1;
    end
    x* ⟵ x_n;
    if n == Nmax then
        Attention : le nombre d'itérations maximal est atteint;
        Stop;
    else
        La méthode converge après n itérations;
    end
end
```

Exercice 3.
On considère un marché correspondant à un produit P. On connaît, pour P, la courbe de demande de l'ensemble des consommateurs en fonction du prix de vente, ainsi que la courbe d'offre de la part des producteurs en fonction du prix d'achat. Les courbes d'offre et de demande sont les suivantes :

$$D(p) = k_0(1 + \frac{1}{p})$$
$$O(p) = k_1 p^{\alpha}$$

Dans la suite, on prendra $k_0 = 20$, $k_1 = 75$ et $\alpha = \frac{3}{2}$.

1. Représenter graphiquement les courbes d'offre et de demande.
2. Trouver le prix d'équilibre p^* du produit P sur le marché étudié en utilisant la méthode de dichotomie.