Correction TD 2

Aymeric Jan (aymeric.jan@univ-paris1.fr)

February 2024

Exercice 1

Question 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Soit x^* tel que $f(x^*) = 0$. Montrons par récurrence que, à l'itération n, x_n satisfait la condition suivante:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n} \tag{1}$$

Pour l'initialisation de notre récurrence, commençons par montrer que (1) est vraie pour $n = 1$.

Initialisation

A la première itération, on pose $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$, ce qui correspond à la moitié du segment $[a, b]$.

Nous avons ensuite deux cas en fonction du signe de $f(a)f(x_1)$

Si $f(a)f(x_1) < 0$, alors $f(a)$ et $f(x_1)$ sont de signes opposés donc f a changé de signe entre a et x_1.

Donc, comme f est continue sur $[a, b]$, f s'annule sur $[a, x_1]$. On pose alors $a_1 = a$ et $b_1 = x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $[a_1, b_1]$ correspond à notre nouvel interval de recherche.

Ainsi, comme $x^* \in [a_1, b_1]$, on a

$$|x_1 - x^*| \leq |x_1 - a_1| = \left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \frac{b-a}{2} \tag{2}$$

De même, si $f(a)f(x_1) > 0$, on a $x^* \in [x_1, b]$ donc

$$|x_1 - x^*| \leq |x_1 - b_1| = \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \frac{b-a}{2} \tag{3}$$

Hérédité

Maintenant, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^* \in [a_n, b_n]$ et $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$.

Si $f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Ainsi, $x^* \in \left[a_{n+1}, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ donc on a

$$|x_{n+1} - x^*| \leq |x_{n+1} - a_{n+1}| = \left|\frac{a_n+b_n}{2} - a_n\right| = \frac{b_n - a_n}{2} \tag{4}$$

Or, par hypothèse, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ donc

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \tag{5}$$

Question 2

On a $|x_n - x^*| \leq \dfrac{b-a}{2^n}$, choisissons donc $\Delta x \geq \dfrac{b-a}{2^n}$

$$\Delta x \geq \frac{b-a}{2^n} \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{b-a}{\Delta x} \Leftrightarrow n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\Delta x}\right) \tag{6}$$

Il suffit donc de prendre n tel que

$$n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\Delta x}\right) \tag{7}$$

Exercice 2

Question 6

Avec $a = 1, b = 2.5, \Delta x = 10^{-8}$

$$\log_2\left(\frac{b-a}{\Delta x}\right) \approx 27.16 \tag{8}$$

Donc $n \geq 28$

Question 9

Soit $e_n = |x_n - x^*|$ l'erreur à l'itération n. Dans le cas de la dichotomie, nous pouvons écrire

$$e_{n+1} \leq Ce_n \Leftrightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n} \leq C, \qquad C = \frac{1}{2} \tag{9}$$

Ainsi, par définition de la vitesse de convergence, la dicthomie est d'ordre 1, soit une vitesse de convergence linéaire.

Exercice 3

Le prix d'équilibre correspond au prix p^* auquel la demande est égale à l'offre: $D(p^*) = O(p^*)$

$$k_0 \left(1 + \frac{1}{p^*}\right) = k_1 \left(p^*\right)^\alpha \Leftrightarrow k_0 \left(1 + \frac{1}{p^*}\right) - k_1 \left(p^*\right)^\alpha = 0 \tag{10}$$

Nous pouvons alors effectuer l'algorithme de dichotomie sur la fonction f (qui est continue sur $]0, +\infty[$) définie comme suit:

$$f(x) = k_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right) - k_1 \left(x\right)^\alpha \tag{11}$$