TP3

Aymeric Jan (aymeric.jan@univ-paris1.fr)

February 14, 2024

Exercice 1

Calculons les points fixes de $g : x \to \dfrac{x^2-1}{3}$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{3} = x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \tag{1}$$

Les points fixes de g sont donc

$$x_1^* = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \in [-1,1] \qquad x_2^* = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \in [3,4] \tag{2}$$

La valeur de $g' : x \to \dfrac{2x}{3}$ au points fixe nous donnera la convergence ou non de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$

$$g'(x_1^*) = 1 - \sqrt{13}/3 \qquad g'(x_2^*) = 1 + \sqrt{13}/3 \tag{3}$$

Ainsi, la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge sur $[-1,1]$ et diverge sur $[3,4]$

Exercice 2

Question 1.a

D'après le corrolaire, on a la majoration de l'erreur suivante

$$|e_n| = |x_n - \bar{x}| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \epsilon \tag{4}$$

$$\frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \epsilon \Leftrightarrow k^n \leq \frac{(1-k)\epsilon}{|x_1 - x_0|} \Leftrightarrow n\ln(k) \leq \ln\left(\frac{(1-k)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right) \tag{5}$$

Soit finalement

$$n \geq \ln\left(\frac{(1-k)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right) / \ln(k) \tag{6}$$

Question 1.b

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = g(x_n) - g(\bar{x}) = g(e_n + \bar{x}) - g(\bar{x}) \tag{7}$$

En faisant un développement limité on a

$$g(e_n + \bar{x}) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})e_n + o(e_n) \tag{8}$$

D'où

$$e_{n+1} = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})e_n + o(e_n) - g(\bar{x}) = g'(\bar{x})e_n + o(e_n) \tag{9}$$

Et en négligeant $o(e_n)$ devant les autres termes on obtient

$$e_{n+1} \approx g'(\bar{x})e_n \tag{10}$$

Question 1.c

Par simple récurrence, $e_{n+1} \approx g'(\bar{x})e_n \Rightarrow e_{n+1} \approx (g'(\bar{x}))^2 e_{n-1} \Rightarrow e_{n+1} \approx (g'(\bar{x}))^{n+1} e_0$

Question 1.d, 1.e, 1.f

Si $|g'(\bar{x})| < 1$ alors la suite converge, si $|g'(\bar{x})| > 1$ elle diverge.

Si $-1 < |g'(\bar{x})| < 0$ alors elle va converger tout en alternant autour de la limite.

Exercice 3

Question 4

Analysons la convergence de la méthode avec les différentes fonctions proposées.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \tag{11}$$

Tout d'abord, calculons les solutions de $f(x) = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4 \tag{12}$$

$$(x-1)^2 - 4 = \left((x-1) + \sqrt{4}\right)\left((x-1) - \sqrt{4}\right) = (x+1-2)(x-1-2) \tag{13}$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \tag{14}$$

Les solutions sont donc

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 3 \tag{15}$$

Maintenant, anlysons la convergence de chacune des fonctions

$$g_1(x) = \sqrt{2x+3} \qquad g_1'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \tag{16}$$

On obtient alors $g_1'(x_1) = 1$ pour lequel on ne peut pas conclure, et $g_1'(x_2) = 1/3$ qui est un point attractif.

$$g_2(x) = \frac{3}{x-2} \qquad g_2'(x) = -\frac{u'}{u^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} \tag{17}$$

On obtient alors $g_2'(x_1) = -1/3$ qui est un point attractif, et $g_2'(x_2) = -3$ qui est un point répulsif.

$$g_3(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) \qquad g_2'(x) = x \tag{18}$$

On obtient alors $g_2'(x_1) = -1$ pour lequel on ne peut pas conclure, et $g_2'(x_2) = 3$ qui est un point répulsif.

Exercice 4

Question 1

Formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_k \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \tag{19}$$

Par définition, $f(x) = (x - x^*)^m h(x)$. En appliquant 19 on obtient

$$f^{(k)} = \sum_j \binom{k}{j} h^{(k-j)} \left[(x - x^*)^m\right]^{(j)} \tag{20}$$

Or, pour $j \leq m - 1, \exists C > 0, \left[(x - x^*)^m\right]^{(j)} = C(x - x^*)^{m-j}$

Donc, si $k \leq m-1$, on peut factoriser tous les termes de la somme par $(x - x^*)$ et donc $f^{(k)}(x^*) = 0$.
Pour $k = m$, on a $f^{(k)}(x^*) = h(x^*)$.
A l'inverse, supposons que $\forall k \leq m - 1, f^{(k)}(x^*) = 0$ et que $f^{(m)}(x^*) \neq 0$. Montrons que x^* est racine d'ordre m.

Par hypothèse, $f \in C^\infty(I)$, on peut alors faire un développement limité de Taylor-Young au voisinage de x^*.

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*)f'(x^*) + \ldots + \frac{(x - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(x^*) + \frac{(x - x^*)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x^*) + o\left((x - x^*)^{m+1}\right) \tag{21}$$

Or, $\forall k \leq m - 1, f^{(k)}(x^*) = 0$, ainsi il nous reste les termes suivants

$$f(x) = \frac{(x - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(x^*) + \frac{(x - x^*)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x^*) + o\left((x - x^*)^{m+1}\right) \tag{22}$$

$$f(x) = (x - x^*)^m \left[\frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} + \frac{(x - x^*)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x^*) + o\left((x - x^*)^{m+1}\right)\right] \tag{23}$$

$$f(x) = (x - x^*)^m h(x) \tag{24}$$

Or, par définition de h, on a $h(x^*) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!}$ qui est non nul car $f^{(m)}(x^*) \neq 0$.

Question 2

Calculons les dérivées successives de $f(x) = x\sin(x)$.

$$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x) \Rightarrow f'(0) = 0 \tag{25}$$

$$f'(x) = 2\cos(x) - x\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 2 \tag{26}$$

De plus, $f(0) = 0$ donc f possède une racine de multiplicité 2.

Question 3

Pour la méthode de Newton, on défini la suite $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = g(x_n) - g(\bar{x}) = g(x_n + \bar{x} - \bar{x}) - g(\bar{x}) = g(e_n + \bar{x}) - g(\bar{x}) = e_n g'(\bar{x}) + o(e_n) \tag{27}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \tag{28}$$

Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$

$$f'(x) = m(x-\bar{x})^{m-1}h(x) + (x-\bar{x})^m h'(x) \tag{29}$$

$$f'(x) = m(m-1)(x-\bar{x})^{m-2}h(x) + 2m(x-\bar{x})^{m-1}h'(x) + (x-\bar{x})^m h''(x) \tag{30}$$

Ce qui donne donc

$$g'(x) = \frac{(x-\bar{x})^{2m-2}h(x)\left[m(m-1)h(x) + 2m(x-\bar{x})^{m-1}h'(x) + (x-\bar{x})^2 h''(x)\right]}{(x-\bar{x})^{2m-2}(mh(x) + (x-\bar{x})h'(x))^2} \tag{31}$$

Et donc $g'(\bar{x}) = 1 - \frac{1}{m}$.
Calculons l'erreur e_{n+1} en fonction de e_n

$$e_{n+1} = e_n g'(\bar{x}) + e_n^2 \frac{g''(\bar{x})}{2} + o(e_n^2) \tag{32}$$

Si $m = 1$, alors $\exists C$, $e_{n+1} = C|e_n|^2 + o\left(e_n^2\right)$. La méthode a alors une convergence quadratique.

Sinon, on peut seulement écrire $\exists C$, $e_{n+1} = C|e_n| + o(e_n)$.

Question 4

Soit $g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$ avec m la multiplicité.

$$g'(\bar{x}) = 1 - m + m\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^2} = 1 - m + m\frac{m-1}{m} = \frac{m - m^2 + m^2 - m}{m} = 0 \tag{33}$$

Ainsi, la convergence est bien quadratique.

Exercice 4

Question 2

Il suffit de modifier légèrement le système pour nous ramener à une équation de la forme $F(x) = 0$

$$\begin{cases} 3x_1^2 - x_2^2 & = 0 \\ 3x_1x_2 - x_1^3 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^2 - x_2^2 & = 0 \\ 3x_1x_2 - x_1^3 - 1 & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on définit la fonction F

$$F : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1x_2 - x_1^3 - 1 \end{bmatrix}$$

Calculons ensuite sa jacobienne. La jacobienne correspond à la matrice des dérinées partielles

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Avec

$$\begin{cases} f_1 : (x_1, x_2) \to 3x_1^2 - x_2^2 \\ f_2 : (x_1, x_2) \to 3x_1x_2 - x_1^3 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 6x_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3x_2 - 3x_1^2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 3x_1 \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -2x_2 \\ 3x_2 - 3x_1^2 & 3x_1 \end{bmatrix}$$