Systèmes linéaires : méthodes directes

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition LU de la matrice A et calculer $\det A$.

2. Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$ avec $b = (2, 14, 12)$.

3. Sans calculer A^2, résoudre le système $A^2\vec{x} = \vec{b}$.

Exercice 2. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ?

2. La matrice A admet-elle une décomposition LU ?

Exercice 3.

1. Programmer une fonction qui prend en entrée une matrice A triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et un vecteur $\vec{b}$, qui résout le système $A\vec{x} = \vec{b}$ par une méthode de descente (resp. remontée) et qui donne le vecteur solution $\vec{x}$ en sortie.

2. Tester vos fonctions sur les systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Indication : Utiliser la fonction `solve` pour vérifier vos algorithmes.

3. Quel est le nombre d'opérations élémentaires (multiplications et additions) utilisées lors de la résolution d'un système triangulaire ?

Indication : Les divisions et les soustractions seront comptées, respectivement, comme multiplications et additions.

Exercice 4.

1. Programmer la méthode de Gauss (sans permutation).

2. L'appliquer à la résolution du système $A\vec{x} = \vec{b}$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$\begin{cases} A_{i,i} = 2, & 1 \leq i \leq n, \\ A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1, & 1 \leq i \leq n-1, \\ A_{i,j} = 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

et $\vec{b} = (1, 0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5. Adapter le programme précédent pour obtenir la factorisation LU de la matrice A.

Indication : vérifier votre algorithme à l'aide de la décomposition calculée à l'exercice 1.

Exercice 6.

1. Écrire un algorithme permettant de calculer la décomposition de Cholesky. Pour cela poser une matrice B triangulaire inférieure de coefficients $B_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$ et déduire de l'égalité $A = BB^T$ les relations permettant de calculer les coefficients de B colonne par colonne.
2. Programme votre algorithme et le l'appliquer à la matrice A de l'exercice précédent.

Exercice 7. Soit le système $A\vec{x} = \vec{b}$, avec A une matrice $n \times n$ symétrique définie positive et $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

1. A l'aide de la décomposition de Choleski, montrer que qu'il existe une décomposition de A de la forme
$$A = LDL^T,$$
avec L une matrice $n \times n$ triangulaire inférieur à diagonale unitaire et D une matrice $n \times n$ diagonale.
2. Calculer la décomposition LDL^T de la matrice A de l'exercice R.
3. D'un point de vue algorithmique, quel est l'avantage de cette décomposition par rapport à la décomposition de Choleski pour la résolution du système ?

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$, la suite de Fibonacci définie par

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad f_0 = 0, f_1 = 1.$$

1. Montrer que $f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, pour tout $n \geq 0$.
2. Pour tout $n \geq 0$, trouver l'unique solution du système
$$\begin{aligned} f_n x_1 + f_{n+1} x_2 &= f_{n+2}, \\ f_{n+1} x_1 + f_{n+2} x_2 &= f_{n+3}. \end{aligned}$$
3. Calculer le conditionnement de la matrice associée au système précédent. Que peut-on dire quand n croit ?