TP4

Aymeric Jan (aymeric.jan@univ-paris1.fr)

March 28, 2024

Exercice 1

Question 1

Nous pouvons expliciter la factorisation comme suit

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{bmatrix}$$

Après avoir effectué le produit matriciel, on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ L_{2,1}U_{1,1} & L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} & L_{2,1}U_{1,3} + U_{2,3} \\ L_{3,1}U_{1,1} & L_{3,1}U_{1,2} + L_{3,2}U_{2,2} & L_{3,1}U_{1,3} + L_{3,2}U_{2,3} + U_{3,3} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Il suffit ensuite d'identifier les différents termes des deux matrices avec la liste suivantes d'équations provenant de (1)

$$\begin{cases} U_{1,1} = 2, \quad U_{1,2} = -1, \quad U_{1,3} = 0 \\ L_{2,1}U_{1,1} = 4 \Rightarrow L_{2,1} = \frac{4}{U_{1,1}} = 2 \\ L_{3,1}U_{1,1} = -6 \Rightarrow L_{3,1} = -3 \\ L_{2,1}U_{1,2} + U_{2,2} = -1 \Rightarrow U_{2,2} = -1 - L_{2,1}U_{1,2} = 1 \\ L_{2,1}U_{1,3} + U_{2,3} = 2 \Rightarrow U_{2,3} = 2 \\ L_{3,1}U_{1,2} + L_{3,2}U_{2,2} = 2 \Rightarrow L_{3,2} = \frac{-2 - L_{3,1}U_{1,2}}{U_{2,2}} = -1 \\ L_{3,1}U_{1,3} + L_{3,2}U_{2,3} + U_{3,3} = 0 \Rightarrow U_{3,3} = 0 - L_{3,1}U_{1,3} - L_{3,2}U_{2,3} = 2 \end{cases}$$

Pour résumer, la factorisation obtenue est la suivante:

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

Passons au calcul du déterminant

$$\boxed{det(A) = det(L) \times det(U) = 4} \tag{2}$$

Sinon...

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 4$$

Question 2

Pour résoudre le système $Ax = b$, nous allons utiliser la décomposition précédente.

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ly = b \\ Ux = y \end{array} \right. \tag{3}$$

Commençons par $Ly = b$

$$Ly = b \Leftrightarrow = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 14 - 2y_1 = 10 \\ -3y_1 - y_2 + y_3 = 12 \Rightarrow y_3 = 28 \end{array} \right.$$

La solution est donc

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Passons à la résolution de $Ux = y$

$$Ux = y \Leftrightarrow = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 28 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 10 \Rightarrow x_2 = 10 - 28 = -18 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = -8 \end{array} \right.$$

La solution est donc

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \\ 14 \end{bmatrix}}$$

Question 3

La résolution de $A^2z = b$ se fait de la manière suivante

$$A^2z = b \Leftrightarrow AAz = b \Leftrightarrow ALUz = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ax = b \\ Ly = x \\ Uz = y \end{cases}$$

Dans la question précédente, nous avons déjà résolu $Ax = b$, nous allons donc commencer par résoudre $Ly = x$

$$Ly = x \Leftrightarrow= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \\ 14 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{cases} y_1 = -8 \\ 2y_1 + y_2 = -18 \Rightarrow y_2 = -18 + 16 = -2 \\ -3y_1 - y_2 + y_3 = 14 \Rightarrow y_3 = 14 - 24 - 2 = -12 \end{cases}$$

La solution est donc

$$y = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Finalement, résolvons $Ux = y$

$$Uz = y \Leftrightarrow= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{cases} z_3 = -6 \\ z_2 + 2z_3 = -2 \Rightarrow z_2 = -2 + 12 = 10 \\ 2z_1 - z_2 = -8 \Rightarrow z_1 = 1 \end{cases}$$

La solution est donc

$$\boxed{y = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}}$$

Exercice 2

Question 1

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Donc

$$det(A) = 4 - 0 - (-2) = 6 \neq 0$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est donc inversible.}}$$

Question 2

La matrice A admet une décomposition LU si et seulement si toutes ses sous-matrices sont inversibles.

$$A_1 = 2 \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = A$$

On a A_1 et A_3 qui sont inversibles, hors A_2 ne l'est pas (sa deuxième colonne est tout simplement deux fois la première).

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ n'admet pas de décomposition LU.}}$$

Exercice 3

Question 3

On note N_{MD} le nombre de muliplications/divisions et N_{AS} le nombre d'additions/soustractions

Comptons le nombre d'opérations pour la résolution du système $Ly = b$

Pour $i = 2$ à n on effectue les opérations suivantes

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} y_j$$

Pour y_i on a donc $N_{MD}^{(1)}(y_i) = i - 1$ et $N_{AS}^{(1)}(y_i) = i$

En sommant sur toutes les valeurs de i, on obtient

$$N_{MD}^{(1)} = \sum_{i=2}^{n} (i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \tag{8}$$

$$N_{AS}^{(1)} = \sum_{i=2}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{9}$$

Comptons à présent le nombre d'opérations pour la résolution du système $Ux = y$

Pour $i = 1$ à $n - 1$ on effectue les opérations suivantes

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j} y_j}{U_{i,i}}$$

Pour x_i on a donc $N_{MD}^{(2)}(x_i) = 1 + (n-1)$ et $N_{AS}^{(2)}(x_i) = 1 + (n-1)$

En sommant sur toutes les valeurs de i on obtient donc

$$
\begin{aligned}
N_{MD}^{(2)} = N_{AS}^{(2)} &= \sum_{i=2}^{n} 1 + (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 + (n-(i+1)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Au total, en combinant les résultats des équations (8), (9) et (10), on obtient

$$N_{MD} = N_{MD}^{(1)} + N_{MD}^{(2)} = n(n-1)$$

$$N_{AD} = N_{AD}^{(1)} + N_{AD}^{(2)} = \frac{n(n+1) + n(n-1)}{2} = n^2$$

$\boxed{\text{Le nombre d'opérations pour résoudre un système avec la factorisation LU est ainsi en } O(n^2)}$.

Exercice 7

Question 1

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut utiliser la décomposition de Cholesky pour obtenir

$$A = MM^T$$

Avec M une matrice triangulaire inférieure.

Par définition, A est inversible donc $det(A) \neq 0$. Or, $det(A) = det(MM^T) = det(M)^2 = \prod_i \lambda_i^2$

Or, $\prod_i \lambda_i^2 \; neq \Rightarrow \forall i, \lambda_i \neq 0$.

L étant triangulaire inférieur, tous les déterminants de ses sous-matrices principales s'écrivent $\prod_{i \leq k} \lambda_i$, ils sont donc tous non nuls, et on peut ainsi appliquer la décomposition LU à M.

On obtient donc

$$A = MM^T = (LU)(LU)^T = LUU^TL^T$$

Or, comme M est triangulaire inférieur, L est triangulaire inférieure et U est diagonale. On peut donc poser $D = UU^T$ pour obtenir

$$\boxed{A = LDL^T}$$

Question 3

L'avantage de cette décomposition est de n'avoir à calculer que des racines carrées triviales (seulement les racines carrées des éléments diagonaux de D).

La résolution du système $Ax = b$ se fait de la façon suivante:

$$\boxed{Ax = b \Leftrightarrow LDL^Tx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Dz = y \\ L^Tx = z \end{cases}}$$

Exercice 8

Question 1

Résonnons par récurrence pour prouver la formule suivante

$$f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \tag{11}$$

L'équation 11 est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons qu'il existe n tel que 11 soit vraie. Montrons que c'est aussi le cas pour $n + 1$

$$f_{n+1} f_{n+3} - f_{n+2}^2 = f_{n+1}(f_{n+1} + f_{n+2}) - f_{n+2}(f_n + f_{n+1})$$

$$= f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{n+2} - f_{n+2} f_n - f_{n+2} f_{n+1} = f_{n+1}^2 - f_{n+2} f_n = -(f_{n+2} f_n - f_{n+1}^2)$$

Or, par hypothèse de récurrence, on a $f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Donc

$$\boxed{f_{n+1} f_{n+3} - f_{n+2}^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}}$$

Question 2

Le système est équivalent au système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+3} \end{bmatrix}$$

Appliquons les formules de Cramer pour résoudre ce système.

Tout d'abord, on a $det(A) = (-1)^{n+1} \neq 0$ donc le sysètme admet une seule et unique solution.

De plus, cette solution est donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{det(A)} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{det(A)}$$

Soit encore

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+3} & f_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} f_n & f_{n+2} \\ f_{n+1} & f_{n+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{vmatrix}}$$

$$x_1 = \frac{f_{n+2}^2 - f_{n+3} f_{n+1}}{f_{n+2} f_n - f_{n+1}^2} = \frac{-(-1)^{n+2}}{(-1)^{n+1}} = 1$$

$$x_2 = \frac{f_n f_{n+3} - f_{n+1} f_{n+2}}{f_{n+2} f_n - f_{n+1}^2} = \frac{f_n f_{n+1} + f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 - f_{n+1} f_n}{f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2} = 1$$

Ainsi, l'unique solution du système est le vecteur

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Question 3

Calculons le conditionement à l'aide de la norme 1.

$$cond_1(A_n) = ||A_n||_1 \times ||A_n^{-1}||_1$$

$$||A_n||_1 = \max\{|f_n| + |f_{n+1}|, |f_{n+1}| + |f_{n+2}|\} = \max\{f_n + f_{n+1}, f_{n+1} + f_{n+2}\} = \max\{f_{n+2}, f_{n+3}\} = f_{n+3}$$

De plus,

$$A_n^{-1} = \frac{1}{det(A_n)} \begin{bmatrix} f_{n+2} & -f_{n+1} \\ -f_{n+1} & f_n \end{bmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} f_{n+2} & -f_{n+1} \\ -f_{n+1} & f_n \end{bmatrix}$$

Donc

$$||A_n^{-1}||_1 = \max\{|f_{n+2}| + |-f_{n+1}|, |-f_{n+1}| + |f_n|\} = \max\{f_{n+2} + f_{n+1}, f_{n+1} + f_n\} = \max\{f_{n+3}, f_{n+2}\} = f_{n+3}$$

Finalement, on a

$$cond_1(A_n) = (f_{n+3})^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$$\boxed{\text{La matrice est donc mal conditionnée pour } n \text{ grand.}}$$