Systèmes linéaires : méthodes itératives

Correction 1.

1. (a) fait en cours, $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$, or $\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$, donc $\vec{e}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c} - T\vec{x} - \vec{c} = T(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}) = T\vec{e}^{(k)}$

(b) $\lim_{k\to\infty} T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \rho(T) < 1$ (exo5 TD0).

(c) $\|\vec{e}^{(k)}\|_2 = \|T^k\vec{e}^{(0)}\| \leq \|T^k\|_2\|\vec{e}^{(0)}\|_2 \leq \|T\|_2^k\|\vec{e}^{(0)}\|_2 = \left(\rho(T^TT)\right)^{\frac{k}{2}}\|\vec{e}^{(0)}\|_2$.

2. (a) On a $A = A^T \Leftrightarrow (M - N) = (M - N)^T \Leftrightarrow M - N = M^T - N^T \Leftrightarrow M + N^T = M^T + N$.

(b) fait en cours (cela revient à montrer que si $M^{-1}N\vec{y} = \lambda\vec{y}$, avec $\vec{y}$ vecteur propre associé à λ valeur propre de T, alors $|\lambda| < 1$, ... $\vec{y}^T(M - N)\vec{y} = (1 - \lambda)\vec{y}^T M\vec{y} > 0$ car $A > 0$ et $\vec{y}^T(M^T + N)\vec{y} = (1 + \lambda)\vec{y}^T M\vec{y} > 0 \Rightarrow (1 - \lambda)/(1 + \lambda) > 0$ i.e. $|\lambda| < 1$).

3. A étant à diagonale strictement dominante, on a pour $i = 1, \ldots, n$, $|a_{ii}| > 0$ et D est inversible et la méthode de Jacobi est bien définie. Elle correspond à la décomposition suivante :

$$M = D \qquad \text{et} \qquad N = L + U.$$

où $A = M - N$ et $T = M^{-1}N$.

D'après le théorème Th1 du cours, il suffit, soit de montrer qu'il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que T vérifie $\|D^{-1}(L + U)\| < 1$, soit de montrer que $\rho(D^{-1}(L + U)) < 1$.

On choisit par exemple, la norme matricielle induite par la norme infinie, i.e.,

$$\|T\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |t_{ij}|.$$

Par suite, comme

$$T = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{12}}{a_{n1}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\frac{a_{n-1n}}{a_{n-1n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

on a alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} |t_{ij}| = \sum_{j\neq i}^{n} |t_{ij}| = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}/a_{ii}| = \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Or, A est à diagonale strictement dominante, i.e., $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On en déduite donc que

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 1,$$

d'où $\|T\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |t_{ij}| < 1$ et la méthode de Jacobi converge.

Remarque : sous les mêmes hypothèses, la méthode de Gauss-Seidel est également convergente.

4. fait en cours (GS bien définie $D-L$ tri inf diag non nulle, $A=A^T \Rightarrow L=U^T$, $M^T+N=$ $...=D>0$ car $A>0$, par le Th2 du cours $\rho(M^{-1}N)=\rho((D-L)^{-1}U)<1$, i.e., la méthode converge).
5. La preuve est similaire à celle de GS, en montrant que $M^T+N=(2-\omega)/\omega D$ i.e. $M^T+N>0$ ssi $(2-\omega)/\omega>0$.

Correction 2.

A n'étant ni symétrique ni à diagonale strictement dominante, on ne peut pas utiliser l'exercice précédent pour l'analyse, mais plutôt le corollaire du Th1 en identifiant M et N suivant les méthodes et en calculant les rayons spectraux des matrices d'itération associées (i.e., T_J et T_{GS}). On trouve $\mathrm{sp}(T_J)=\{0,0,0\}$ convergence et $\mathrm{sp}(T_J)=\{0,2,2\}$ divergence.

Correction 3.

1. Soit on passe par le calcul des valeurs propres et on regarde si elles sont positives soit on prouve que $x^TAx>0, \forall x\neq\vec{0}\in\mathbb{R}^n$.

On a

$$\begin{aligned} x^TAx &= \sum_{i=2}^{n-1} x_i(a_{ii-1}x_{i-1}+a_{ii}x_i+a_{ii+1}x_{i+1})+x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+x_n(a_{nn}x_n+a_{n-1n}x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} x_i(-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1})+2x_1^2-x_1x_2+2x_n^2-x_{nn-1} \\ &= x_1^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2+x_n^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

2. D'après le théorème 2 du cours, pour une matrice $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, qui s'écrit sous la forme $A=M-N$, si $M^T+N\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\rho(M^{-1}N)<1$. Pour la méthode de Jacobi, on a $D=M$ et $N=L+U$. Par suite, on a, $\forall x\neq\vec{0}\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x^T(M^T+N)x = x^T(D+L+U)x &= \sum_{i=2}^{n-1} x_i(x_{i-1}+2x_ix_{i+1})+2x_1^2+x_1x_2+2x_n^2+x_{nn-1} \\ &= x_1^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i+1})^2+x_n^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

3. A étant symétrique définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge.

4. Comme $(\rho(T_J))^2=\rho(T_{GS})$, les méthodes convergent ou divergent simultanément.

5. Comme $A=A^T, T_J=(D(L+U))^T=D(L^T+U^T)=T_J^T$

$$\|\vec{e}^{(k)}\|_2 \leq \left(\rho(T_J^TT_J)\right)^{\frac{k_J}{2}}\|\vec{e}^{(0)}\|_2=\rho(T_J)^{k_J}\|\vec{e}^{(0)}\|_2=(1/2)^{k_J}\|\vec{e}^{(0)}\|_2$$

Une condition suffisante pour Jacobi est donnée par

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k_J}\leq\varepsilon$$

et pour GS

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{k_{GS}}\leq\varepsilon$$

Il suffisant ensuite d'identifier k_J et k_{GS}.