Systèmes linéaires : méthodes itératives

Exercice 1. On souhaite résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$ par une méthode itérative. On construit une suite de vecteurs $(\vec{x}^{(k)})_{k\geq 0}$, avec $\vec{x_0}$ donné et

$$\vec{x}^{(k+1)} = T\vec{x}^{(k)} + \vec{c},$$

où T est une matrice qui dépend de A et $\vec{c}$ un vecteur dépendant de A et de $\vec{b}$.

1. Soit $\vec{x}^*$ la solution de $A\vec{x} = \vec{b}$, on pose $\vec{e}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*$, l'erreur à l'itération k.

(a) Montrer que
$$\vec{e}^{(k+1)} = T\vec{e}^{(k)},$$
et en déduire que $\vec{e}^{(k)} = T^k\vec{e}^{(0)}$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante (faisant intervenir le rayon spectral de T) pour que la suite $(\vec{x}^{(k)})$ converge vers $\vec{x}^*$.

(c) Montrer que
$$\|\vec{e}^{(k)}\|_2 \leq \left(\rho(T^T T)\right)^{\frac{k}{2}} \|\vec{e}^{(0)}\|_2.$$

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, une matrice carrée symétrique définie positive. Soit la décomposition $A = M - N$, avec M inversible.

(a) Montrer que la matrice $(M^T + N)$ est symétrique.

(b) Montrer que si $(M^T + N)$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.

4. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.

5. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et si $0 < \omega < 2$, alors la méthode de relaxation converge.

Exercice 2. Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étudier la convergence de la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Exercice 3.

Soit A, la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{cases} A_{i,i} = 2, & 1 \leq i \leq n, \\ A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1, & 1 \leq i \leq n-1, \\ A_{i,j} = 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

et $\vec{b} = (1, 0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la matrice A est définie positive.

2. La méthode de Jacobi converge-t-elle ?

3. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

4. Dans le cas $n = 2$, vérifier la relation suivante :

$$(\rho(T_J))^2 = \rho(T_{GS}),$$

où T_J et T_{GS} sont les matrices d'itération associées aux méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel, respectivement. Que peut-on en déduire sur la convergence/divergence des deux méthodes ? (*Remarque* : ce résultat est valable pour les matrices tridiagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

5. Déterminer une condition suffisante sur le nombre d'itération k dans le cas de l'algorithme de Jacobi et de celui de Gauss-Seidel pour que

$$\frac{\|\vec{e}^{(k)}\|_2}{\|\vec{e}^{(0)}\|_2} \leq \varepsilon.$$

où $\vec{e}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*$, l'erreur à l'itération k et ε une précisions donnée

6. Programmer une fonction qui prend en entrée une matrice A, un vecteur $\vec{b}$ et un vecteur initial $\vec{x}_0$ et calcule la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ par la méthode de Jacobi.

7. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

8. Évaluer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision fixée (e.g., 10^{-2}) et comparer les deux méthodes pour différentes valeurs de n.