Interpolation polynômiale et Intégration numérique

Exercice 1. On considère les fonctions suivantes et les noeuds $x_0 = 0, x_1 = 0.3$ et $x_2 = 0.9$.

$$f(x) = \cos(x), \quad f(x) = \sqrt{1+x}, \quad f(x) = \log(x+1), \quad f(x) = \tan(x).$$

1. Construisez les polynômes d'interpolation de degré au plus un et au plus deux pour approcher $f(0.45)$, et déterminez l'erreur absolue.

2. Déterminer une borne pour les erreurs d'approximation associées.

Exercice 2. Soient $a_1, \ldots, a_n$, n nombres réels distincts non nuls.

1. Montrer que le système de n équations à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_i)^k x_{k+1} = b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

admet une unique solution quels que soient les nombres réels b_i.
On note A la matrice associée à ce système, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$ le second membre et $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

2. Écrire le système pour $\vec{b} = \vec{b}_p$, $\vec{b}_p$ étant le vecteur tel $b_i = 0$ pour $i \neq p$ et $b_p = 1$ sinon.

3. Dans ce cas, indiquer comment peut-on déterminer les valeurs des inconnues x_i en comparant les polynômes :

$$Q_p(y) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} y^k, \quad \text{et} \quad L_p(y) = \frac{\prod_{i \neq p}(y - a_i)}{\prod_{i \neq p}(a_p - a_i)}.$$

4. En déduire les vecteurs colonnes de A^{-1}, puis l'expression de A^{-1}.

5. *Application :* déterminer explicitement les polynômes $L_p(y)$ puis l'expression de A^{-1} avec $n = 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$ et $a_4 = -2$.

Exercice 3. Supposons qu'une table de données doive être préparée pour la fonction $f(x) = \exp(x)$, pour x dans $[0, 1]$. Supposons que le nombres de décimales à fournir par entrée est $d \geq 8$ et que la différence entre les valeurs x successives, le pas, est h. Quelle taille de h assurera que l'interpolation linéaire donne une erreur absolue d'au plus 10^{-6} pour tous les x dans $[0, 1]$?

Exercice 4.

Le polynôme de Bernstein de degré n pour $f \in C[0, 1]$ est donné par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

Ces polynômes peuvent être utilisés pour fournir une démonstration du Théorème d'approximation de Weierstrass (car $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$).

1. Trouvez $B_3(x)$ pour les fonctions

$$f(x) = x, \quad f(x) = 1.$$

2. Montrez que pour tout $k \leq n$,
$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}.$$

3. Montrer que, pour $f(x) = x^2$,
$$B_n(x) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x.$$

Indiction : un raisonnement analogue à celui généralement utilisé pour le calcul des deux premiers moments d'une variable aléatoire de loi binomiale peut-être utilisé.

4. Estimer la valeur de n nécessaire pour que $|B_n(x) - x^2| \leq 10^{-6}$ soit valable pour tout x dans $[0, 1]$. Comment se comporte l'erreur d'approximation pour le polynôme de Lagrange dans ce cas ?

5. Comparez numériquement l'approximation de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ à l'aide des polynômes de Lagrange et des polynômes de Bernstein. Pour les polynômes de Lagrange, utilisez des points d'interpolation équidistants et pour les polynômes de Bernstein, effectuez une transformation appropriée pour adapter l'intervalle $[0, 1]$ à $[-1, 1]$. Analysez et comparez les résultats des deux méthodes d'approximation pour différentes valeurs de n et discutez les avantages et inconvénients de chaque méthode d'approximation pour cette fonction.

Exercice 5. On souhaite approcher les intégrales suivantes
$$\int_{0.5}^{1} x^4 dx, \quad \int_{0}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx, \quad \int_{1}^{5} x^2 \log x dx.$$

1. Utiliser la méthode des trapèzes, déterminez une majoration de l'erreur d'approximation $E(x)$, et comparez-la à l'erreur réelle $e(x) = f(x) - P(x)$.

2. Même question avec la méthode de Simpson.

Exercice 6. Déterminez la formule de Simpson avec le terme d'erreur en utilisant
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi).$$

Trouvez a_0, a_1 et a_2 à partir du fait que la règle de Simpson est exacte pour $f(x) = x^n$ lorsque $n = 1, 2$ et 3. Trouvez ensuite k en appliquant la formule d'intégration avec $f(x) = x^4$.