Interpolation polynômiale et Intégration numérique

Exercice 1.

1.

$$
\begin{aligned}
&P_1(x) = -0.148878x + 1; P_1(0.45) \approx 0.93;\\
&|f(0.45) - P_1(0.45)| \approx 0.032;\\
&P_2(x) = -0.452592x^2 - 0.0131009x + 1; P_2(0.45) \approx 0.90;\\
&|f(0.45) - P_2(0.45)| \approx 0.002;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_1(x) = 0.467x + 1; P_1(0.45) \approx 1.21;\\
&|f(0.45) - P_1(0.45)| \approx 0.006;\\
&P_2(x) = -0.078x^2 + 0.49x + 1; P_2(0.45) \approx 1.20;\\
&|f(0.45) - P_2(0.45)| \approx 0.0008;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_1(x) = 0.874x + 1; P_1(0.45) \approx 0.39;\\
&|f(0.45) - P_1(0.45)| \approx 0.021;\\
&P_2(x) = -0.268x^2 + 0.955x + 1; P_2(0.45) \approx 0.37;\\
&|f(0.45) - P_2(0.45)| \approx 0.0038;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_1(x) = 1.03x + 1; P_1(0.45) \approx 0.46;\\
&|f(0.45) - P_1(0.45)| \approx 0.019;\\
&P_2(x) = 0.61x^2 + 0.84x + 1; P_2(0.45) \approx 0.505;\\
&|f(0.45) - P_2(0.45)| \approx 0.022;
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&P_1 : |\frac{f''(\xi)}{2}(0.45-0)(0.45-0.6)| \leq 0.135\\
&P_2 : |\frac{f'''(\xi)}{6}(0.45-0)(0.45-0.6)(0.45-0.9)| \leq 0.00397.
\end{aligned}
$$

$P_1 : 0.03$
$P_2 : 0.01$

$P_1 : 0.135$
$P_2 : 0.010$

$P_1 : 0.068$
$P_2 : 0.151$

Exercice 2. Soient $a_1, \ldots, a_n$, n nombres réels distincts non nuls.

1. On se donne un vecteur $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et on considère le système linéaire, d'inconnue le vecteur $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_i)^k x_{k+1} = b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Écriture matricielle du système :

Pour $i = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_1)^k x_{k+1} = b_1$$

i.e.,

$$x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_1^{n-1} x_n = b_1$$

$i = 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_2)^k x_{k+1} = b_2$$

i.e.,

$$x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_2^{n-1} x_n = b_2$$

$i = n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_n)^k x_{k+1} = b_n$$

i.e.,

$$x_1 + a_n x_2 + \ldots + a_n^{n-1} x_n = b_n$$

On obtient donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est une matrice de Vandermonde dont le determinant vaut

$$\det(A) = \prod_{i<j} (a_i - a_j).$$

Ce dernier est non nul si les a_i sont (2 à 2) distincts et dans ce cas le système est inversible quel que soit $\vec{b}$.

2. Le système $A\vec{x} = \vec{b}_p$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
i = 1 : \quad & \sum_{k=0}^{n-1} (a_1)^k x_{k+1} = 0 \\
i = 2 : \quad & \sum_{k=0}^{n-1} (a_2)^k x_{k+1} = 0 \\
& \vdots \\
i = p : \quad & \sum_{k=0}^{n-1} (a_p)^k x_{k+1} = 1 \\
& \vdots \\
i = n : \quad & \sum_{k=0}^{n-1} (a_n)^k x_{k+1} = 0
\end{aligned}$$

3. On pose

$$Q_p(y) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} y^k = x_1 + x_2 y + x_3 y^2 + \dots$$

et

$$L_p(y) = \frac{\prod_{i \neq p} (y - a_i)}{\prod_{i \neq p} (a_p - a_i)}.$$

On a $L_p(a_i) = \delta_{ip} = Q_p(a_i)$, Q_p est le $p-$ième polynôme de Lagrange.

4. Lorsque l'on résout $A\vec{x} = \vec{b}_p$, alors $\vec{x}$ est la $p-$ième colonne de A^{-1}.

5. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
L_1(y) &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}y - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \\
L_2(y) &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{12}y + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{12}y^3 \\
L_3(y) &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \\
L_4(y) &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{12}y - \frac{1}{12}y^2 + \frac{1}{6}y^3
\end{aligned}$$

i.e.,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & 2/3 & -1/6 \\ 2/3 & -1/12 & -2/3 & 1/12 \\ -1/6 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ -1/6 & 1/12 & 1/6 & -1/12 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soient $x_0, \dots, x_n$ les noeuds sur les lesquels f est évalué, $x \in [0, 1]$ et supposons que j satisfait $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. L'erreur d'interpolation linéaire est donnée par

$$|f(x) - P_1(x)| = |\frac{f''(\xi_x)}{2}(x - x_j)(x - x_{j+1})|$$

Comme $x_j = jh$ et $x_{j+1} = (j+1)h$,

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{\max_{\xi\in[0,1]} \exp(\xi)}{2} |(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

On pose $g(x) = x(-jh)(x - (j+1)h)$, pour $jh \leq x \leq (j+1)h$. On a $g'(x) = 2(x - jh - h/2)$, le seul point critique de g est $x = jh + h/2$, avec $g(jh + h/2) = h^2/4$. Comme $g(jh) = g((j+1)h) = 0$, la valeur maximale de $|g'(x)|$ dans $[jh, (1+j)h]$ est atteinte en le point critique, ce qui implique

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{e}{2} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |g(x)| \leq \frac{eh^2}{8}$$

Par conséquent, pour s'assurer que l'erreur dans l'interpolation linéaire ne dépasse pas 10^{-6}, il suffit de choisir h tel que

$$\frac{eh^2}{8} \leq 10^{-6}$$

i.e., $h < 1.72 \times 10^{-3}$. Comme $n = (1-0)/h$ doit être entier, un choix raisonnable est $h = 0.001$.

Exercice 5.

1. Pour $f(x) = x$ on trouve, $B_3(x) = x$ et pour $f(x) = 1$, on a $B_3(x) = 1$.

2. Par définition,

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

3. En utilisant l'égalité précédente, la suivant,

$$\begin{aligned} k(k-1)\binom{n}{k} &= k(k-1) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= n(n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1)\binom{n-2}{k-2}, \end{aligned}$$

et en faisant deux changement d'indices, on obtient

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} (k(k-1) + k) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k(1-x)^{n-k} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j(1-x)^{n-2-j} + nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j(1-x)^{n-1-j} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(n(n-1)x^2 \cdot 1 + nx \cdot 1 \right) \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \end{aligned}$$

4.

$$|B_n(x) - x^2| = \left| x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - x^2 \right| = \frac{x(1-x)}{n}$$

L'erreur maximale se produit en $x = 0.5$:

$$\frac{0.5 \cdot 0.5}{n} \leq 10^{-6}$$

$$\frac{0.25}{n} \leq 10^{-6}$$

$$n \geq 250000$$

Ainsi, pour $n \geq 250000$, $|B_n(x) - x^2| \leq 10^{-6}$ pour tout x dans [0, 1].

Exercice 5.

1.

$$I \approx 0.265625, 0.071875, 0.125$$
$$I \approx -0.2678571, 7.9 \times 10^{-4}, 9.7 \times 10^{-4}$$
$$I \approx -0.17776434, 0.35, 0.39$$

2.

$$I \approx 0.194, 2.604 \times 10^{-4}, 2.6042 \times 10^{-4}$$
$$I \approx -0.267, 7.14 \times 10^{-7}, 9.92 \times 10^{-7}$$
$$I \approx 0.192, 1.406 \times 10^{-5}, 2.70 \times 10^{-5}$$

Exercice 6. La résolution du système linéaire donne $a_0 = h/3$, $a_1 = 4h/3$ et $a_2 = h/3$. On trouve $k = -h^5/90$.